

Differentieringsprojekt – Jensens Dåsefabrik

Gruppe: Theis Pieter, Simon From, Mikkel Kongsted, Maksim Shvets

Afleveringsdato: 26/05/2023

Teori

Optimering

Vores mål i opgaven er at optimere overfladeareal ud fra forskellige mål, f.eks. radius af en cylinder.

Eksempelvis en cylinder med kendt volume, hvor vi prøver at optimere overfladeareal:

Hvis vi en formel hverken kender højde, radius eller overfladeareal ender vi med 3 ubekendte, som vi ikke kan løse.

Derfor omskriver vi formlen for volumen af figuren, til at opsætte højde som en funktion af radius.

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$h(r) = \frac{V}{\pi \cdot r^2}$$

$$TOA = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot r + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$TOA(r) = 2 \cdot \pi \cdot h(r) \cdot r + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$r_{optimal} := \text{solve}(TOA'(r) = 0)$$

$$f(r_{optimal} - 1) = - \text{ukendt}$$

$$f(r_{optimal} + 1) = + \text{ukendt}$$

Siden den er negativ fra $]-\infty; r_{optimal}]$ og positiv fra $[r_{optimal}; \infty[$, er det et lokalt minimum.

Vores højde og overfladeareal med optimal radius er så hhv. $h(r_{optimal})$ og $TOA(r_{optimal})$

Derefter har vi kun de to ubekendte, radius og overfladeareal.

Vi kan så opstille overfladeareal som en funktion af radius, og finde det lokale minimum, ved at finde der, hvor overfladearealsfunktionen differentieret giver 0.

Derefter kan vi eftertjekke med monotoniforhold, om hvorvidt det er et lokalt minimum eller maksimum.

Hvis det er et lokalt minimum, har vi vores optimale radius for overfladearealet, og kan nu bestemme højde og overfladeareal ved hjælp af tidligere nævnte funktioner af radius vi har opstillet.

Dette er
ikke
teori
Det er
forklaring
til opgaven

Formler for cylinder

I en cylinder med radius r og højden h er gælder det at:

Grundflade

$$G = \pi \cdot r^2$$

Volume:

$$V = G \cdot h$$

Overfladeareal:

$$A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h + r)$$

Formler for kegle

I en kegle med højden h , radius r og sidelængden s gælder det at:

Grundflade

$$G = \pi \cdot r^2$$

Volume

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$

Krumme overfladeareal

$$O = \pi \cdot r \cdot s$$

Formler for kasse:

I en kasse med siderne a, b, og h gælder det at:

Volume

$$V = a \cdot b \cdot h$$

Overfladeareal

$$A = 2(b \cdot h + a \cdot b + a \cdot h)$$

Formler for pyramider

I en pyramide med kvadratisk grundflade der har højden h og sidelængden s gælder det at

Grundflade

$$G = s^2$$

Volume

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$

Overfladeareal

$$A = G + \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} \cdot a}{2} \cdot 4$$

Formler for keglestub

I en keglestub med store radius R, lille radius r og højden h gælder det at

Volume

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \pi \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)$$

Krumme overfladeareal

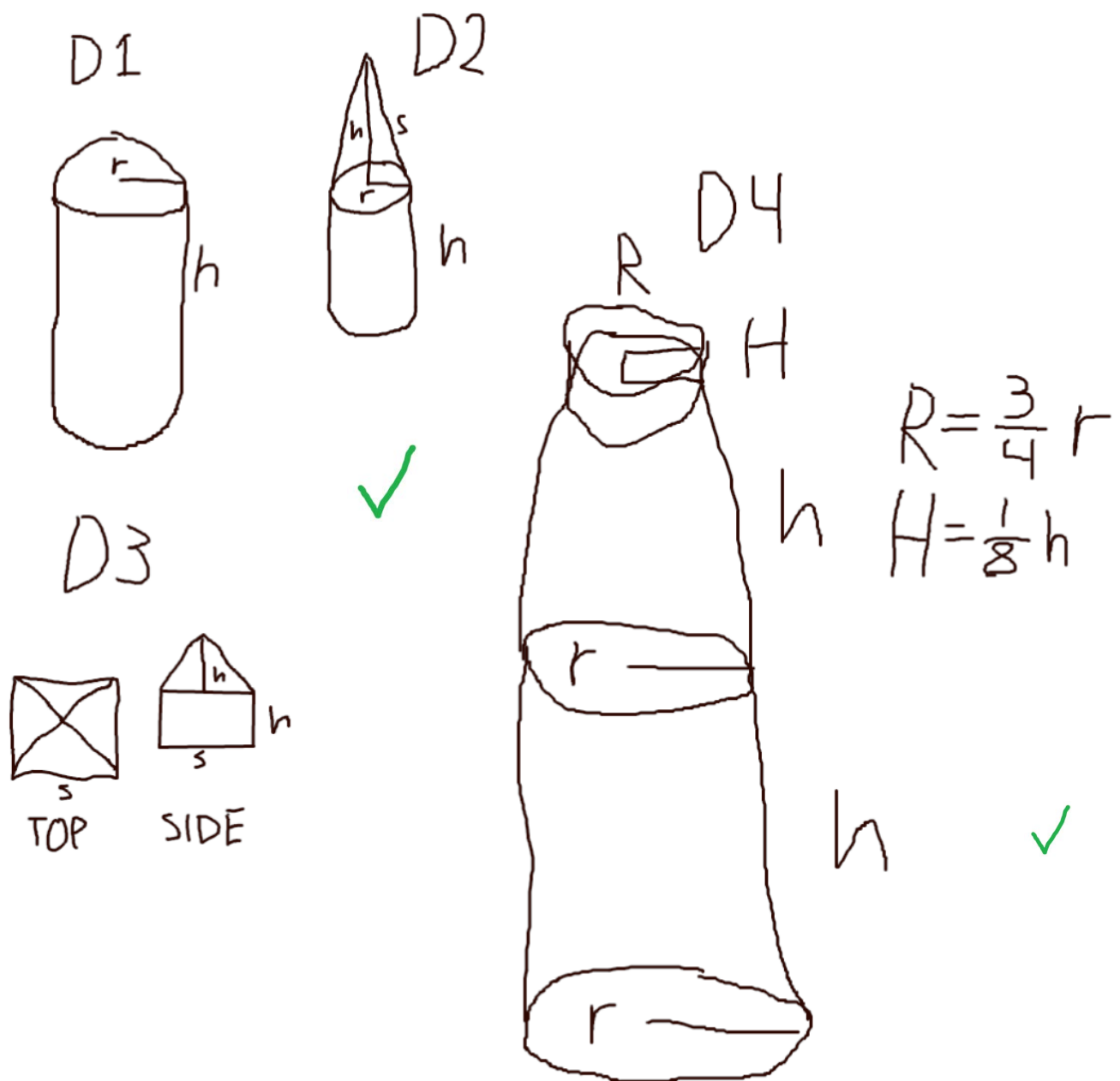
$$O = \pi \cdot (R + r) \cdot a$$

Opgave 1

Teorien mangler

Den skal omhandle differentialregning.

Det gør afsnittet ikke



Opgave 2

D1:

restart

Vores dåse skal have en volume på 330ml

$V := 330$:

Eftersom at $1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$, er det nemmere at udregne målene i cm til sidst.

Eftersom figuren er en cylinder, betyder det at vi skal bruge cylinderens 2 grundfladers areal og den krumme overflades areal.

Dvs. vores totale overfladeareal TOA er defineret således:

$$TOA = 2 \cdot A_{\text{grund}} + O_{\text{cylinder}}$$

Vi bruger formelen for arealet af en cirkel til at finde grundfladen af figuren:

$$A_{grund} := \pi \cdot r^2:$$

Vi bruger formelen for det krumme overflade af en cylinder til at udregne den krumme overflade af cylinderen:

$$O_{cylinder} := \pi \cdot 2 \cdot r \cdot h:$$

$$TOA := 2 \cdot A_{grund} + O_{cylinder} = 2\pi hr + 2\pi r^2 \quad \checkmark$$

Vi vil gerne optimere figurens overfladeareal ift. radius, så derfor skal vi kunne omskrive h med respekt til radius.

Siden vi ikke kender r og TOA ender vi med to ubekendte, så vi skal i stedet omskrive formelen for volumen af figuren, siden vi kender volumen.

Siden formen er en cylinder, skal vi bruge formelen for volumen af en cylinder. Dvs.

$$V = V_{cylinder} = 330$$

$$V_{cylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Vi kan så isolere højden, og definere den som en funktion af radius.

$$h(r) := \frac{V}{\pi \cdot r^2}:$$

$$h(r) = \frac{330}{\pi r^2}$$

Med det, kan vi opstille formelen for det totale overflade areal af vores figur som en funktion af radius:

$$TOA(r) := 2 \cdot \pi \cdot h(r) \cdot r + 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot$$
$$TOA(r) = \frac{660}{r} + 2\pi r^2 \quad \checkmark$$

Og finde det lokale ekstrem, ved at finde der hvor hældningen af tangenten er 0:

$$r := \text{fsolve}(TOA'(r) = 0) = 3.744938504$$

$$TOA'(r-1) = -53.10096039$$

$$TOA'(r+1) = 30.31213770 \quad \checkmark$$

Siden den er aftagende op til r og voksende efter r er det et lokalt minimum.

Nu hvor vi har vores optimale radius, kan vi sætte den ind i vores funktion for overfladeareal, for at finde det optimale overfladeareal for vores figur.

$$TOA(r) = 264.3568109$$

Og i vores funktion for højde, for at finde det optimale højde for vores figur.

$$h(r) = 7.489877006$$

Den optimale overfladeareal må så være 264.35 cm^2 , og den optimale radius må så være 3.75 cm , og den optimale højde må være 7.49 cm . ✓

D2:

restart

Vi kan starte med konvertere vores volume på 50cl til ml:

$$V := 50 \cdot 10 = 500$$

Eftersom at $1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$, er det nemmere at udregne målene i cm til sidst.

Eftersom figuren består af en cylinder med en kegle ovenpå betyder det at vi skal bruge en

cirkel for grundfladen, eftersom det er en cylinder, og det krumme overflade på hhv. cylinderen og keglen.

Dvs. vores totale overfladeareal TOA er defineret således:

$$TOA = A_{grund} + O_{cylinder} + O_{kegle}$$

Vi bruger formelen for arealet af en cirkel til at finde grundfladen af figuren:

$$A_{grund} := \pi \cdot r^2 :$$

Vi bruger formlen for det krumme overflade af en cylinder til at udregne den krumme overflade af cylinderdelen af figuren:

$$O_{cylinder} := \pi \cdot 2 \cdot r \cdot h :$$

Og formlen for den krumme overflade af en kegle til at udregne den krumme overflade af kegedelen af figuren:

$$O_{kegle} := \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} :$$

$$TOA := A_{grund} + O_{cylinder} + O_{kegle} = \pi r^2 + 2\pi rh + \pi r \sqrt{h^2 + r^2}$$

Vi vil gerne optimere figuren's overfladeareal ift. radius, så derfor skal vi kunne omskrive h med respekt til radius.

Siden vi ikke kender r og TOA ender vi med to ubekendte, så vi skal i stedet omskrive formelen for volumen af figuren, siden vi kender volumen.

Siden formen har en kegle og en cylinder, skal (formlen for volumen af en cylinder + formelen for volumen af en kegle) = 500, som er vores volume. Dvs.

$$V = V_{cylinder} + V_{kegle} = 500$$

$$V_{cylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_{kegle} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h \cdot 3}{3} + \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = 500 :$$

Vi omskriver det til en brøk, da det er en smule lettere at regne med

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h \cdot 4}{3} :$$

Og så isolerer vi højden, og definerer den som en funktion af radius.

$$h(r) := \frac{V \cdot 3}{4 \cdot \pi \cdot r^2} :$$

$$h(r) = \frac{375}{\pi r^2}$$

Med det, kan vi opstille formelen for det totale overflade areal af vores figur som en funktion af radius:

$$TOA(r) := \pi \cdot r^2 + \pi \cdot 2 \cdot r \cdot h(r) + \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \sqrt{h(r)^2 + r^2}}{2} :$$

$$TOA(r) = \pi r^2 + \frac{750}{r} + \pi r \sqrt{\frac{140625}{\pi^2 r^4} + r^2}$$

Og finde det lokale ekstrem, ved at finde der hvor hældningen af tangenten er 0:

$$r := fsolve(TOA'(r) = 0) = 4.647870373$$

$$TOA'(r-1) = -50.91176728$$

$$TOA'(r+1) = 35.06383123$$

Siden den er aftagende op til r og voksende efter r er det et lokalt minimum.

Nu hvor vi har vores optimale radius, kan vi sætte den ind i vores funktion for overfladeareal, for at finde det optimale overfladeareal for vores figur.

$$TOA(r) = 334.6612564$$

Og vores funktion for højde, for at finde den optimale højde.

$$h(r) = 5.525522866$$

Den optimale overfladeareal må så være 334.66 cm^2 , og den optimale radius må så være 4.64 cm , og den optimale højde må være 5.53 cm .

D3:

restart

Vi kan starte med konvertere vores volumen 50cl til ml:

$$V := 50 \cdot 10 = 500$$

Eftersom at $1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$, er det nemmere at udregne målene i cm til sidst.

Eftersom figuren består af en kasse med en pyramide ovenpå betyder det at vi skal bruge en firekant for grundfladen, eftersom det er en kasse, og det krumme overflade på hhv. kassen og pyramiden.

Dvs. vores totale overfladeareal TOA er defineret således:

$$TOA = A_{\text{grund}} + O_{\text{kasse}} + O_{\text{pyramide}}$$

Vi bruger formelen for arealet af en firkant til at finde grundfladen af figuren:

$$A_{\text{grund}} := a \cdot a:$$

Vi bruger formelen for den krumme overflade af en kasse til at udregne den krumme overflade af kassedelen af figuren:

$$O_{\text{kasse}} := h \cdot a \cdot 4:$$

Og formelen for den krumme overflade af en pyramide til at udregne den krumme overflade af pyramidedelen af figuren:

$$O_{\text{pyramide}} := \sqrt{h^2 + a^2} \cdot a \cdot 2:$$

$$TOA := A_{\text{grund}} + O_{\text{kasse}} + O_{\text{pyramide}} = a^2 + 4ha + 2\sqrt{a^2 + h^2}a$$

I skal kun bruge $a/2$

Vi vil gerne optimere figuren's overfladeareal ift. side længde, så derfor skal vi kunne omskrive h med respekt til side længde som vi definere som $[a]$.

Siden vi ikke kender side længde og TOA ender vi med to ubekendte, så vi skal i stedet omskrive formelen for volumen af figuren, siden vi kender volumen.

Siden formen har en kegle og en cylinder, skal (formlen for volumen af en cylinder + formelen for volumen af en kegle) = 500, som er vores volume. Dvs.

$$V = V_{\text{kasse}} + V_{\text{pyramide}} = 500$$

$$V_{\text{kasse}} = a^2 \cdot h$$

$$V_{\text{pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

$$V = a^2 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = 500:$$

Vi omskriver det til en brøk for at gøre det nemmere at regne med:

$$V = \frac{4 \cdot a^2 \cdot h}{3}$$

Vi isolerer højden, og definerer den som en funktion af sidelængde.

$$h(a) := \frac{V \cdot 3}{4 \cdot a^2} :$$

$$h(a) = \frac{375}{a^2}$$



Med det, kan vi opstille formelen for det totale overflade areal af vores figur som en funktion af sidelængde:

$$TOA(a) := a^2 + h(a) \cdot a \cdot 4 + \sqrt{h(a)^2 + a^2} \cdot a \cdot 2 :$$

$$TOA(a) = a^2 + \frac{1500}{a} + 2 \sqrt{\frac{140625}{a^4} + a^2} a$$

Og finde det lokale ekstrem, ved at finde der hvor hældningen af tangenten er 0:

$$a := \text{fsolve}(TOA'(x) = 0, x = 0.. \infty) = 7.408118765$$

$$TOA'(a - 1) = -23.93927646$$

$$TOA'(a + 1) = 18.38345472$$

Siden den er aftagende op til r og voksende efter r er det et lokalt minimum.

Nu hvor vi har vores optimale sidelængde, kan vi sætte den ind i vores funktion for overfladeareal, for at finde det optimale overfladeareal for vores figur.

$$TOA(a) = 406.6824101$$

Og vores funktion for højde, for at finde den optimale højde for vores figur.

$$h(a) = 6.833062534$$

Den optimale overfladeareal må så være 406.68 cm^2 , og den optimale sidelængde må så være 7.41 cm , og den optimale højde må være 6.83 cm

Rigtig metode, men en fejl undervejs

D4:

restart

Vi kan starte med konvertere vores volumen 50cl til ml:

$$V := 50 \cdot 10 = 500$$

Eftersom at $1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$, er det nemmere at udregne målene i cm til sidst.

Vores figur består af en cylinder med en keglestub ovenpå, hvor radius'en af den øverste

grundflade på keglestubben er $\frac{3}{4}$ af radiusen af den nederste grundflade, og keglestubben og cylinderen deler en højde.



$$R = \frac{3}{4} r$$

$$H = \frac{1}{8} h$$

Derudover er der også en cylinder ovenpå keglestubben, som er $\frac{1}{8}$ så høj som den nederste cylinder, og deler grundflade med keglestubben.
Dvs. vores totale overfladeareal TOA er defineret således:

$$TOA = A_{grund} + O_{kasse} + O_{pyramide}$$

Vi bruger formelen for arealet af en firkant til at finde grundfladen af figuren:

$$A_{grund} := a \cdot a:$$

Vi bruger formelen for den krumme overflade af en kasse til at udregne den krumme overflade af kassedelen af figuren:

$$O_{kasse} := h \cdot a \cdot 4:$$

Og formelen for den krumme overflade af en pyramide til at udregne den krumme overflade af pyramidedelen af figuren:

$$O_{pyramide} := \sqrt{h^2 + a^2} \cdot a \cdot 2:$$



Passer ikke med pyramidestubben

$$TOA := A_{grund} + O_{kasse} + O_{pyramide} = a^2 + 4ha + 2\sqrt{a^2 + h^2}a$$

Vi vil gerne optimere figuren's overfladeareal ift. side længde, så derfor skal vi kunne omskrive h med respekt til side længde som vi definere som $[a]$.

Siden vi ikke kender side længde og TOA ender vi med to ubekendte, så vi skal i stedet omskrive formelen for volumen af figuren, siden vi kender volumen.

Siden formen har en kegle og en cylinder, skal (formlen for volumen af en cylinder + formelen for volumen af en kegle) = 500, som er vores volume. Dvs.

$$V = V_{kasse} + V_{pyramide} = 500$$

$$V_{kasse} = a^2 \cdot h$$

$$V_{pyramide} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$



Forkert formel. Denne gælder ikke for en pyramidestub

$$V = a^2 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = 500:$$

Vi omskriver det til en brøk for at gøre det nemmere at regne med:

$$V = \frac{4 \cdot a^2 \cdot h}{3}$$

Vi isolerer højden, og definerer den som en funktion af sidelængde.

$$h(a) := \frac{V \cdot 3}{4 \cdot a^2}:$$

$$h(a) = \frac{375}{a^2}$$

Med det, kan vi opstille formelen for det totale overflade areal af vores figur som en funktion af sidelængde:

$$TOA(a) := a^2 + h(a) \cdot a \cdot 4 + \sqrt{h(a)^2 + a^2} \cdot a \cdot 2:$$

$$TOA(a) = a^2 + \frac{1500}{a} + 2\sqrt{\frac{140625}{a^4} + a^2}a$$

Og finde det lokale ekstrem, ved at finde der hvor hældningen af tangenten er 0:

$$a := fsolve(TOA'(x) = 0, x = 0.. \infty) = 7.408118765$$

$$TOA'(a - 1) = -23.93927646$$

$$TOA'(a + 1) = 18.38345472$$

Siden den er aftagende op til a og voksende efter a er det et lokalt minimum.

Nu hvor vi har vores optimale sidelængde, kan vi sætte den ind i vores funktion for overfladeareal, for at finde det optimale overfladeareal for vores figur.

$$TOA(a) = 406.6824101$$

Og vores funktion for højde, for at finde den optimale højde for vores figur.

$$h(a) = 6.833062534$$

Den optimale overfladeareal må så være 406.68 cm^2 , og den optimale sidelængde må så være 7.41 cm , og den optimale højde må være 6.83 cm

I har tilsyneladende regnet på den samme dåse som D3

Opgave 3

restart

Vores dåse skal have en volume på 330ml

$$V := 330 :$$

Eftersom at $1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$, er det nemmere at udregne målene i cm til sidst.

Eftersom figuren består af en cylinder, betyder det at vi skal bruge de 2 grundflader's areal, og den krumme overflade's areal.

Dvs. vores totale overfladeareal TOA er defineret således:

$$TOA = 2 \cdot A_{\text{grund}} + O_{\text{cylinder}}$$

Vi vil gerne regne prisen ud af arealet, hvor top og bund koster $1.2 \frac{\text{øre}}{\text{cm}^2}$ og den krumme

overflade koster $0.35 \frac{\text{øre}}{\text{cm}^2}$

Dvs. vores formel for pris er defineret således:

$$\text{pris} = 2 \cdot A_{\text{grund}} \cdot 1.2 + O_{\text{cylinder}} \cdot 0.35$$

Vi bruger formelen for arealet af en cirkel til at finde grundfladen af figuren:

$$A_{\text{grund}} := \pi \cdot r^2 :$$

Vi bruger formelen for det krumme overflade af en cylinder til at udregne den krumme overflade af cylinderen:

$$O_{\text{cylinder}} := \pi \cdot 2 \cdot r \cdot h :$$

$$\text{pris} := 2 \cdot A_{\text{grund}} \cdot 1.2 + O_{\text{cylinder}} \cdot 0.35 = 2.4 \pi r^2 + 0.70 \pi r h$$

Vi vil gerne optimere figuren's overfladeareal ift. radius, så derfor skal vi kunne omskrive h med respekt til radius.

Siden vi ikke kender r og pris ender vi med to ubekendte, så vi skal i stedet omskrive formelen for volumen af figuren, siden vi kender volumen.

Siden formen er en cylinder, skal vi bruge formelen for volumen af en cylinder. Dvs.

$$V = V_{\text{cylinder}} = 330$$

$$V_{\text{cylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Vi kan så isolere højden, og definere den som en funktion af radius.

$$h(r) := \frac{V}{\pi \cdot r^2} :$$

$$h(r) = \frac{330}{\pi r^2}$$

Med det, kan vi opstille formelen for prisen af overfladearealet af vores figur som en funktion af radius:

$$pris(r) := 2 \cdot \pi \cdot h(r) \cdot r \cdot 0.35 + 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 1.2 :$$

$$pris(r) = \frac{231.00}{r} + 2.4 \pi r^2$$

Og finde det lokale ekstrem, ved at finde der hvor hældningen af tangenten er 0:

$$r := fsolve(pris'(r) = 0) = 2.483554091$$

$$pris'(r-1) = -82.58403306$$

$$pris'(r+1) = 33.49514528$$

Siden den er aftagende op til r og voksende efter r er det et lokalt minimum.

Nu hvor vi har vores optimale radius, kan vi sætte den ind i vores funktion for overfladeareal, for at finde det optimale overfladeareal for vores figur.

$$pris(r) = 139.5177988$$

Og i vores funktion for højde, for at finde det optimale højde for vores figur.

$$h(r) = 17.03008520$$

Prisen må så være 139.51 øre, og den optimale radius må så være 2.48 cm, og den optimale højde må være 17.03 cm.



I mangler teori om differentialregning

I opgaverne mangler I også generelt at vise, at I forstår hvad det er, der sker, når man differentierer