

Maksim og Simon From

• Formål

I dette projekt er formål:

Beskrive formen af en eller anden ting fra omgivelser, som kan beskrives som et omdrejningslegeme omkring enten x- eller y-aksen ved hjælp af matematiske udtryk.

Blive bevidst om, hvilke slags spørgsmål, der er karakteristisk for matematik og selv kunne stille sådanne spørgsmål.

Opstille og løse forskellige problemer fra matematikken i anvendelse – åbne såvel som lukkede.

Analysere grundlaget for og egenskaber for en model, bedømme dens rækkevidde og holdbarhed, kunne udføre aktiv modelbygning og bringe matematikken i spil uden for matematikken selv.

Betjene et CAS-værktøj og have indblik i værktøjets muligheder og begrænsninger i forskellige konklusioner.

• Teori

Teori - Rumfang af rotation om X-aksen:

Når et objekt roteres om X-aksen, dannes der et rumligt område, der kan beskrives og beregnes ved hjælp af bestemte formler.

med formel og teorie jeg vil bevise om rumfang af rotation om X-aksen:

Lad os antage, at vi har en funktion $f(x)$, som beskriver tværsnittet af figuren, der roteres omkring X-aksen i intervallet

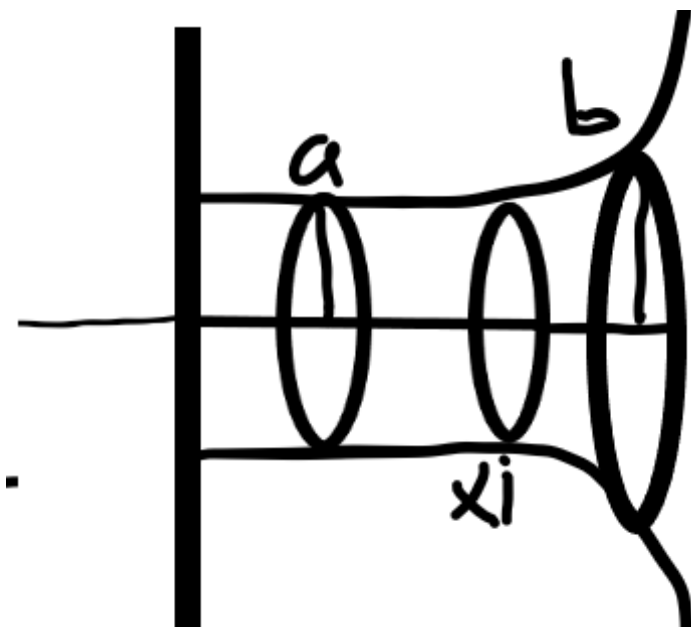
$[a, b]$. Vi ønsker at finde volumenet af det resulterende rotationslegeme.

hvis vi tager formel for rumfang af cylinder " $\pi \cdot r^2 \cdot h$ " og definere det som " V_i "

Vi kan opdele figuren langs x-aksen i små skiver af tykkelsen Δx .

Hver skive kan betragtes som en tynd cylinder med radius $f(x)$ og højden Δx den kan vi kalde for x_i .





nu vi jeg bevise, at denne formel kan bruges til at finde rumfang af rotation om X-aksen:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx$$

Vi kan finde areal af skive x_i at sige:

areal af cylinder:

$$V_i := \pi \cdot r^2 \cdot h$$

det kan omkrives til:

$$V_i := \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$$



For at finde det samlede volumen V af rotationslegemet, summerer vi volumenet af hver skive over hele intervallet $[a, b]$

så V er $\approx$ sumen af V_i :

$$V \approx \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$$

så kan vi tage grænse værdien når n går mod uendelig

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n V_i \right)$$

det kan vi integere til:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx$$



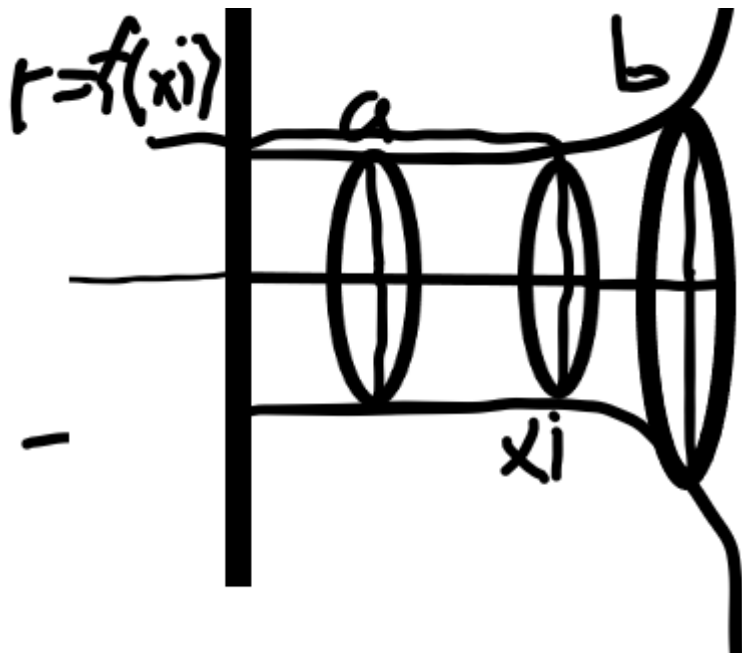
grænse værdi af sum bliver til et integrale og "i" i " x_i " forsvinder fordi x_i er et specifikt stykke af kurven og vi vil gerne have hele stykket så vi fjerner det og laver det om til " x " og Δx bliver til dx , dermed er formelen rigtig

Teori - overfalde areal af rotation af X-aksen:

Antag at vi har en funktion $f(x)$, der beskriver overfladens radius som funktion af x på intervallet

$[a,b]$. Vi ønsker at beregne overfladearealet af det område, der dannes, når denne kurve roteres omkring X-aksen.

Først, lad os definere overfladearealet OA_i af en lille tynd skive på højden Δx ved en vilkårlig x -værdi. Overfladearealet af denne skive er bare overfladearealet af en cylinder:



Vi kan finde OA ved at sige:
 overflade er længde * bredde
 det kan omskrives til
 omkreds * kurvelængde
 jeg vil bevise
 $OA = \text{omkreds} * \text{kurvelængde}$

formel for omkreds af en cylinder er: $2 \cdot \pi \cdot r$ bliver til $2 \cdot \pi \cdot f(x_i)$

formel for krueælægde er: $\sqrt{1 + f'(x)^2} \Delta x$ bliver til $\sqrt{1 + f'(x_i)^2} \Delta x$

omkreds kan defineres som :

$\langle \checkmark \rangle$

$$\text{omkreds} = 2 \cdot \pi \cdot f(x_i)$$

kurvelængde kan defineres som:

$$\text{kurvelængde} = \sqrt{1 + f'(x_i)^2} \Delta x$$

så kan vi bare sætte ind:

$$OA_i = 2 \cdot \pi \cdot f(x_i) \cdot \sqrt{1 + f'(x_i)^2} \Delta x$$

For at finde det samlede overfladeareal af rotationslegemet, summerer vi overfladenareal af hver skive over hele intervallet $[a,b]$
 så OA er $\approx$ sumen af OA_i :

$$OA \approx \sum_{i=1}^n OA_i$$

så kan vi tage grænse værdien af n går mod uendelig

$$OA = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n OA_i \right)$$

som vi så kan integrere og omskrive til:

grænse værdi bliver til et integrale og "i" i "xi" forsvinder fordi xi er et specifikt stykke af kurven og vi vil gerne have hele stykket så vi fjerner det og laver det om til "x" og Δx bliver til dx, dermed er formelen rigtig for overfalde areal af rotation af X-aksen

$$OA = \int_a^b 2 \cdot \pi \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$



Løsningsafsnit

Opgaven

Denne projektopgave går ud på at beskrive formen af en eller anden ting fra dine omgivelser ved hjælp af matematiske udtryk. Du må selv bestemme, om du vil arbejde med et af forslagene fra nedenstående liste, eller du vil finde dit eget produkt, som kan beskrives som et omdrejningslegeme omkring enten x- eller y-aksen:

- en tekande
- en colaflaske
- en skål
- en lysestage
- en vase
- en håndvask

I forbindelse med fremstilling af produktet er det relevant at kende overfladeareal og volumen af dit produkt. Du skal selv opstille opgaver, der er relevante for dit produkt.

Husk, at du selv vælger det niveau besvarelsen skal befinde sig på alt afhængig af, hvilket produkt du arbejder med, og hvad du finder det relevant at undersøge!

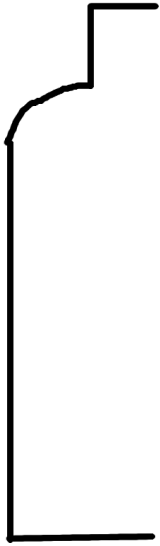
Det er et krav, at du i opgaven kommer omkring emner som

- Opstilling af en funktionsforskrift
- Volumenberegning vha. integration
- Overfladeberegning vha. integration

with(plots) :

with(Student[Calculus1]) :

Jørgen Jensen vil gerne starte sin egen sportsvandsfabrik. For at kunne sælge sin sportsvand, skal Jørgen Jensen bruge flasker til at sælge det i. Han har besluttet sig at producere flaskerne selv. Han har på et stykke papir tegnet en skitse på et stykke papir af flaskens profil.



For at kunne regne på flasken, skal vi kunne beskrive den matematisk. Dette kan vi gøre ved at beskrive flasken med funktioner.

Flasken kan beskrives med 3 funktioner i 3 intervaller. Den første lige del, den kurvede del og den øverste lige del:

For $[0;10[$:

$$f_1(x) := 3 :$$

For $[10;12[$:

$$f_2(x) := -0.25 \cdot x^2 + 5x - 22 :$$

For $[12;14]$

$$f_3(x) := 2$$

$$f_3 := x \mapsto 2$$

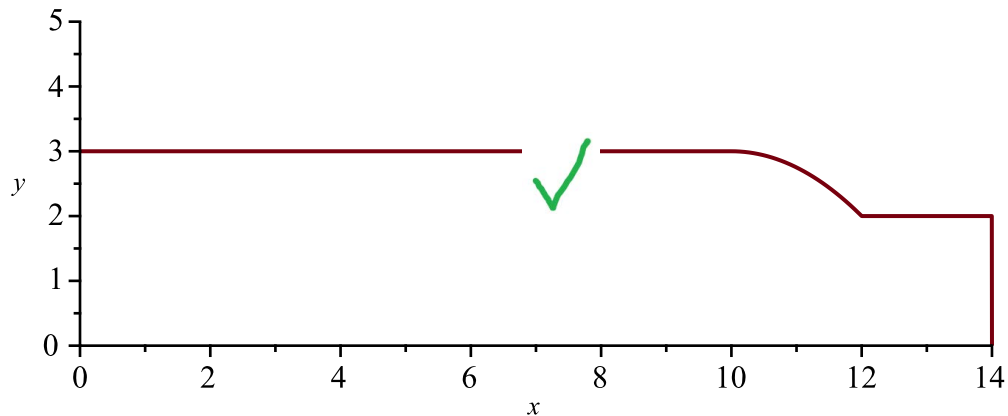
(1)

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & 0 \leq x < 10 \\ f_2(x) & 10 \leq x < 12 \\ f_3(x) & 12 \leq x < 14 \end{cases}$$

$$f := x \mapsto \begin{cases} f_1(x) & 0 \leq x < 10 \\ f_2(x) & 10 \leq x < 12 \\ f_3(x) & 12 \leq x < 14 \end{cases} \quad (2)$$

Her er flaskens profil beskrevet som funktioner plottet i et koordinatsystem:

`plot(f(x), x=0..14, y=0..5)`

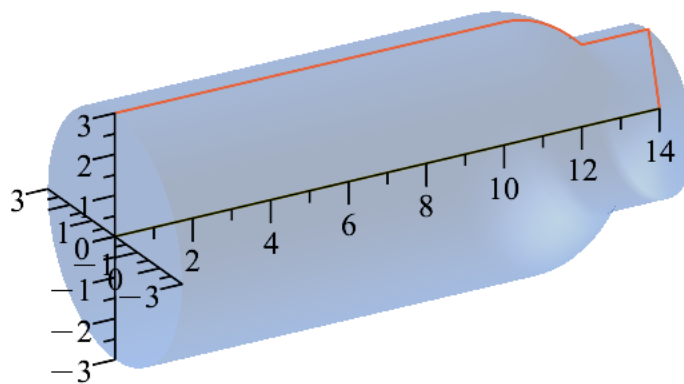


I bør her argumentere mere for, at det lige præcis er disse forskrifter, som I benytter

Jørgen Jensen vil gerne vide, hvor meget væske der kan være i flasken. Han vil gerne have der mindst kan være 300 mL i flasken.

For at regne dette, vil vi rotere funktionen om X-aksen og regne volumen.

`VolumeOfRevolution(f(x), x=0..14, output=plot)`



The solid of revolution created on $0 \leq x \leq 14$ by rotation of

$$\begin{cases} 3 & 0 \leq x \textbf{ and } x < 10 \\ -0.25x^2 + 5x - 22 & 10 \leq x \textbf{ and } x < 12 \\ 2 & 12 \leq x \textbf{ and } x \leq 14 \end{cases}$$

For at regne rumfanget, dvs. volumen af figuren formet af funktionen roteret om X-aksen, bruger vi følgende formel.

$$V_x = \int_{x_1}^{x_2} \pi \cdot (f(x))^2 dx$$

Vi regner arealet af flasken fra bunden til toppen, dvs. x_1 og x_2 defineres følgende.

$x_1 := 0 :$
 $x_2 := 14 :$

Og arealet regnes følgende.

$$V := \int_{x_1}^{x_2} \pi \cdot (f(x))^2 dx = 353.1150143$$



Hvis vi antager at cordinatsystemet er i centimeter, har flasken en kapacitet lidt over 353 *mL*. Siden 353 *mL* > 300 *mL* burde Jørgen Jensen være tilfreds med kapticiteten af flasken.



Jørgen Jensen ønsker at påfylde 300 *mL* sportsvand i flaskerne. Han ønsker også at have en etiket på flasken. Toppen af etiketten, vil Jørgen Jensen gerne, er på samme højde som væskespejlet i flasken.

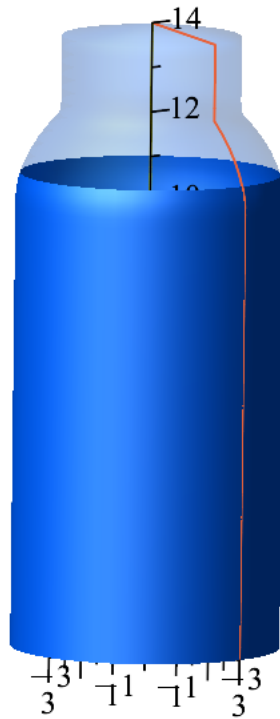
For at regne dette opstiller vi en ligning med formlen fra forrige udregning og en volume på 300 *mL*, så vi løser forhøjden af flasken, som er x_2 , da vi regner flasken ud af X-aksen, altså liggende ned.

$$x_2 := rhs \left(fsolve \left(\left\{ \int_{x_1}^{x_{højde}} \pi \cdot (f(x))^2 dx = 300 \right\} \right) [1] \right) = 10.62367582$$

Dvs. væskeoverfladen ligger ca. 10.6 *cm* over bunden af flasken.

$p1 := VolumeOfRevolution(f(x), x = 0 .. 14, output = plot) :$
 $p2 := SurfaceOfRevolution(f(x), x = 0 .. x_2, output = plot) :$

$display(\{p1, p2\})$



$$\text{Surface of revolution formed when } \begin{cases} 3 & 0 \leq x \text{ and } x < 10 \\ -0.25x^2 + 5x - 22 & 10 \leq x \text{ and } x < 12 \\ 2 & 12 \leq x \text{ and } x < 14 \end{cases} = \begin{cases} 3 \\ -0.25x^2 + 5 \\ 2 \end{cases}$$

Jørgen Jensen vil gerne vide, hvor meget plastik han skal bruge, for at producere hver flaske. Vi antager funktionen beskriver flasken korrekt ved at ignorere, at bunden ikke er repræsenteret og toppen ikke repræsenterer det låg, som ville bruges i virkeligheden. Vi antager også at plastikken er uendelig tyndt, men alligevel vejer $0.1 \frac{g}{cm^2}$. For at regne dette, vil vi regne overfladearealet af funktionen roteret om X-aksen med følgende formel.

$$OA_f = 2 \cdot \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$$

Intervallet er igen fra 0 til 14 da vi vil regne det for hele flasken, derfor defineres x_1 og x_2 følgende.

$$x_1 := 0 :$$

$$x_2 := 14 :$$

$$A := 2 \cdot \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx = 251.6192328$$

Dvs. Jørgen Jensen skal bruge ca. $A \cdot 0.1 \, g = 25.16192328 \, g$ plastik pr. flaske.



• Diskussion & Konklusion

I dette projekt lavede vi en matematisk model til at beskrive formen af en flaske, der skal bruges til at indeholde sportsvand til Jørgen Jensens sportsvandsfabrik.

Ved at opdele flaskens profil i tre segmenter og anvende passende funktioner i hvert interval kunne vi repræsentere flaskens form.

Så vi kunne visualisere flasken og beregne dens volumen og overfladeareal.

Ved at rotere flaskens profil omkring X-aksen kunne vi beregne det resulterende rumfang og hvor meget væske flasken kan indeholde.

Vores beregninger viste, at flasken har en kapacitet på ca. 353 mL hvilket opfylder kravet på mindst 300mL sportsvand.

Desuden blev overfladearealet af flasken beregnet for at bestemme mængden af plastik, der er nødvendig til at producere hver flaske. Vores beregninger viste, at ca.

25.16g plastik er påkrævet per flaske.

Begrænsninger og forbedringsmuligheder:

En af de primære begrænsninger ved denne tilgang er, at modellen antager, at flasken er symmetrisk omkring X-aksen og at dens vægtykkelse er ens over hele sin længde. Dette er muligvis ikke realistisk for alle flasker. Derudover kan der være andre faktorer såsom produktionsomkostninger.

I konklusionen kan vi fastslå, at den udviklede matematiske model var effektiv til at beskrive flaskens form og beregne dens kapacitet og mængden af plastik, der er nødvendig til produktion. Resultaterne viser, at flasken opfylder kravene til sportsvandsproduktionen, og giver Jørgen Jensen den nødvendige information for at fortsætte med planlægningen af sin virksomhed.

Samlet set demonstrerer dette projekt værdien af matematiske modeller i design- og produktionsprocesser.

God besvarelse, men der er mangler dog, at I gør noget ud af, hvordan I kommer frem til funktionsforskriften. Det er meget væsentligt