

M. Kogsted, T. Hollebeek, S. Jakobsen
MAT 20ia 2024

Beholdere med saltopløsning

Formål

Hvad er formålet med opgave? Hvad er det, du skal blive bedre til ved at løse opgaven?

Formålet med opgaven er at finde sammenhæng mellem tidspunkter og mængder af saltindhold i vandtanke, hvor vand løber ind og ud, og derved ændre på saltindholdet. Til dette bruger vi differentiallyigninger. Med differentiallyigninger kan vi undersøge væksten/henfaldet for en funktion i et givet punkt. Vi bruger dette, til at finde tiden, hvor saltindholdet er nået et bestemt niveau og finde saltindholdet i en bestemt tid, m.m.



Teori

Du skal gøre rede for den teori, der anvendes til at løse opgaverne. Det skal hovedsageligt være den teori, der er ny i netop dette projekt. Du må gerne beskrive relevante beviser – med egne ord. Formålet med dette er, at du gerne skulle have samlet al relevant materiale omkring opgaven, så du lettere kan præsentere opgaven på et højt fagligt/taksonomisk niveau ved mundtlig eksamen.

*restart
with(plots) :*

Vi antager viden om ligninger og funktioner. Vi kan bruge en funktion (f.eks. $f(x)$) til at finde en x -værdi fra en y -værdi og vice versa. Vi antager viden om differentiering og integration. Vi kan bruge differentiering til at finde den afledte funktion (f.eks. $f'(x)$), som beskriver hældningen på funktionen, den er afledt af. Det vil sige, man kan med den afledte funktion finde et punkts hældning på en given x -værdi og vice versa. Man kan bruge integrering til at finde det udtrykket af et differentieret udtryk.

Vi vil kun behandle differentiallyigninger af første orden. Forskellen er, hvor mange gange det mest differentierede led er differentieret.



En differentiallyigning er en ligning, hvori et differentieret led indgår.



Eksempel:

$$y' = 2x$$

Differentiallyigninger (som i differentiering) beskriver hældningen/væksten/udvikling af en funktion.

Givet funktionen

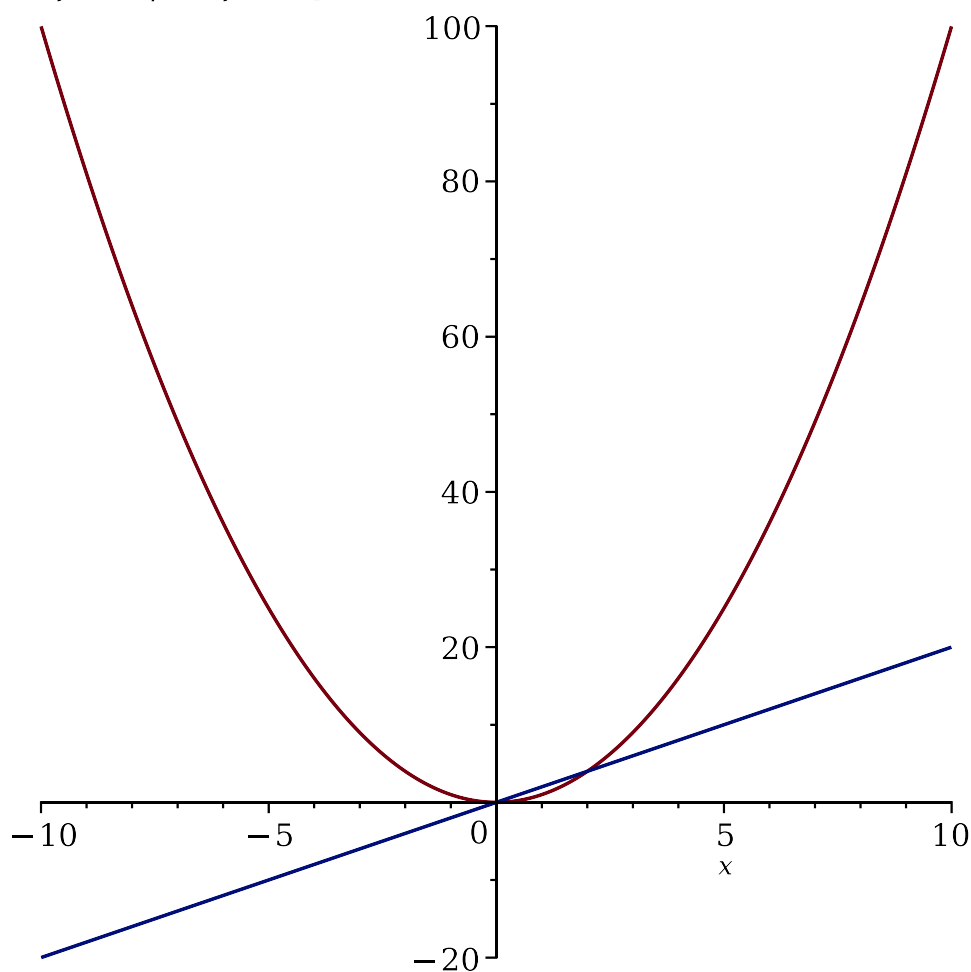
$$f(x) = x^2$$

kan vi definere en differentialligning, der fortæller hældningen af funktionen. Dette gør vi, ved at differentiere udtrykket.

$$f'(x) = 2x$$

De danner sådanne kurver

$f(x) := x^2$:
`display([plot(f(x)), plot(f'(x))])`



Her kan man se, differentialligningen/den afledte funktion (blå) beskriver hældningen på funktionen (rød). Altså når den blå er negativ, falder den røde og når blå er positiv, stiger den røde. Jo større den blå er, jo hurtigere falder eller stiger den røde.



Typisk med differentiaalligninger, har man brug for at *løse* dem. Dette gøres ved først at finde den generelle løsning. Og med et kendt punkt på kurven, kan man også finde en specifik løsning til differentiaalligningen. Løsningen er funktionen, som differentiaalligningen er afledt af.

Ligesom $y = f(x)$, så $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$, dette ved vi fra integralregning.



Løs en differentiaalligning:

Hvis vi har en differentiaalligning vi vil løse:

$$\frac{dy}{dx} = -2 \cdot y$$

Step 1 er at gøre ligningen integrer-bar. Dette gøres ved at isolerer komponenterne, her dx og dy , på hver side.

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -2 \cdot y \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -2$$

$$\frac{1}{y} \cdot dx \cdot \frac{dy}{dx} = -2 \cdot dx$$

$$\frac{1}{y} \cdot dy = -2 \cdot dx$$

Step 2 er at integrere hver side.

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -2 dx$$



$$\ln(y) = -2x + k$$

Step 3 er at isolere den ene side, her y .

$$e^{\ln(y)} = e^{-2x+k}$$

$$y = e^{-2x+k}$$



Som vi kan huske fra integralregning, så kommer der et konstant led, når man integrerer. Fordi udtrykket indeholder den ukendte konstant, er dette den generelle løsning på differentiaalligningen.

$$f(x) := e^{-2x+k};$$

Step 4 er at finde den specifikke løsning, altså finde konstantens værdi.

Dette kræver man har et kendt punkt, funktionen går igennem. Vi siger i dette eksempel, funktionen går gennem punktet (6, 4). Det man så gør, er at løse funktionen med x-værdien, når den er lig y-værdien.

$$v := \text{solve}(f(6) = 4, \{k\}) = \{k = 12 + 2 \ln(2)\}$$

$$\text{evalf}(\text{rhs}(v[1])) = 13.38629436$$

Ekspontientiel vækst

Der er forskellige slags differentialligninger. Der findes ingen metode til at løse alle slags, men forskellige typer har hver deres løsning.

En af disse slags er eksponentiel vækst. Den ser generelt sådan ud:

$$y' = a \cdot y$$

Det der kendetegner denne form, er differentialkvotienten på den ene side og konstanten ganget med kvotienten på den anden side. Alle differentialligninger, der kan omskrives til sådanne form, er under kategorien eksponentiel vækst.

Den generelle løsning for differentialligninger af slagsen eksponentiel vækst er følgende.

$$y = c \cdot e^{ax}$$

Hvor a og x er det samme som før, og c er en ny-introduceret ukendt konstant. Det at finde værdien af c, er det samme som at finde den specifikke løsning af differentialligningen.

Ovenstående udtryk kan bevises sådan:

$$y' - ay = 0$$

$$y' + (-a)y = 0$$

Gang med e^{-ax} på hver side.

$$(y' - ay) \cdot e^{-ax} = 0 \cdot e^{-ax}$$

$$y' \cdot e^{-ax} + y \cdot (-ae^{-ax}) = 0$$

Husk produktreglen:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Som når vi anvender, får vi:

$$(y \cdot e^{-ax})' = 0 \quad ??? \text{ hvad sker der her ???}$$

$$y \cdot e^{-ax} = c \quad \langle \checkmark \rangle$$

$$y = c - e^{-ax} \quad \cdot /$$

Forskudt eksponentiel vækst

Forskudt eksponentiel vækst ser generelt sådan ud:

$$y' = b - a \cdot y$$

Altså en differentialkvotient på den ene siden, og en konstant minus kvotienten ganget med en faktor. Alle differentiaalligninger der kan omskrives til dette, er under kategorien eksponentiel vækst.

Den generelle løsning ser sådan ud:

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$$

Igen er c en introduceret konstant.

Beviset for løsningen ser sådan ud:

$$y' = b - a \cdot y$$

$$y' + a \cdot y = b$$

Man ganger med e^{ax} og anvender produktreglen:

$$(y' + a \cdot y) \cdot e^{ax} = b \cdot e^{ax}$$

$$y' \cdot e^{ax} + y \cdot a \cdot e^{ax} = b \cdot e^{ax}$$

$$(y \cdot e^{ax})' = b \cdot e^{ax} \quad \langle \checkmark \rangle \text{ Forklaring mangler. Hvad sker der her??}$$

Man tager det ubestemte integrale på hver side:

$$\int (y \cdot e^{ax})' dy = \int b \cdot e^{ax} dx$$

$$y \cdot e^{ax} = b \cdot \frac{1}{a} \cdot e^{ax} + c$$

$$y \cdot e^{ax} \cdot e^{-ax} = \left(\frac{b}{a} \cdot e^{ax} + c \right) \cdot e^{-ax}$$

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$$



Logistisk vækst

Logistisk vækst ser sådan ud:

$$y' = a \cdot y \cdot (M - y)$$

Den løses sådan:

$$y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-aMx}}$$

Ikke relevant for projektet.

Løsningsafsnit

Her skal du foretage de relevante beregninger til løsning af opgaven. Det er vigtigt, at du husker at lægge vægt på dokumentationen af dine beregninger, altså at du hele tiden forklarer, hvad du regner på, og hvorfor du vælger en bestemt metode. Dokumentér også gerne ved hjælp af skitser og grafer.

I tre 1000 liters beholdere er der salt opløst i vand.

I beholder A og B er der 800 liter vand, hvori der er opløst 25 kg salt.

I beholder C er der 500 liter vand, hvori der er opløst 25 kg salt.

restart

with(plots) :

Opgave 1 (Tanke A):

Rent vand løber ind i beholderen med en hastighed på 1 liter i minuttet og blandes med saltvandet. Samtidig løber blandingen ud af beholderen med samme hastighed.

Opløsningens saltindhold $y = f(t)$ er en funktion af tiden t målt i minutter.

a) Vis at y opfylder følgende differentialligning:

$$\frac{dy}{dx} = -0.00125 y$$

Mængden af salt der løber ud hvert minut i forhold til den totale saltmængde, vil være proportionelt til mængden af vand, der løber ud i forhold til den totale mængde af vand. Siden der løber vand ind og ud i samme mængde, forbliver mængden af vand i tanken 800 liter. Vi kan derfor sige, at mængden af salt der løber ud hvert minut d , som proportion til den totale mængde salt, er lig proportionen af mængden af vandet der løber ud, i forhold til den totale mængde.

$$d := \frac{1}{800} = 0.001250000000$$

For hvert minut er der løbet 1 liter vand ud med en vis mængde salt ud af tanken. Dette betyder, at den totale mængde salt i tanken falder. I funktionen $f(t)$ der beskriver saltindholdet for en given tid, tages i betragtning, at den totale saltmængde i tanken falder. Dette gøres ved at inddrage saltindholdet y ($y = f(t)$), ikke i selve funktionen, men i den afledte funktion, differentiaalligningen, som beskriver funktionen $f(t)$'s *hældning* i en given tid. Derfor kan vi definere den afledte funktion, der beskriver hældningen som følgende.

$$f'(t) = -0.00125 y$$

Vi tilføjer fortegn, da vandet løber ud, dvs. saltindholdet falder.



b) Løs differentiaalligningen fra spørgsmål a)

Differentiaalligningen er som følgende.

$$\frac{dy}{dx} = -0.00125 \cdot y$$

Vi omskriver ligningen, for at isolere y .

$$\frac{1}{y} \cdot dy = -0.00125 \cdot dx$$

Vi integrerer derefter ligningen.

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -0.00125 dx$$

Dette resulterer i følgende, hvor $x = t$.

$$\ln(y) = -0.00125 x + k$$

Vi omskriver som følgende, for at få y til at stå for sig selv.

$$y = e^{-0.00125 x + k}$$

Vi omskriver som følgende, så den står som funktionen $f(t)$.

$$f(t) = e^{-0.00125 t + k}$$

Ovenstående er *den generelle løsning* på differentialligningen, da vi stadig har en ubekendt konstant k . For at finde den specifikke løsning, regner vi værdien af k , i et defineret punkt; efter 0 minutter, er der 25 kg salt i tanken.

$$f(t) := e^{-0.00125 t + k} :$$

$$\text{solve}(f(0) = 25, \{k\}) = \{k = 2 \ln(5)\}$$

Vi kan derfor definere *den specifikke løsning* som følgende.

$$f(t) := e^{-0.00125 t + 2 \ln(5)} :$$



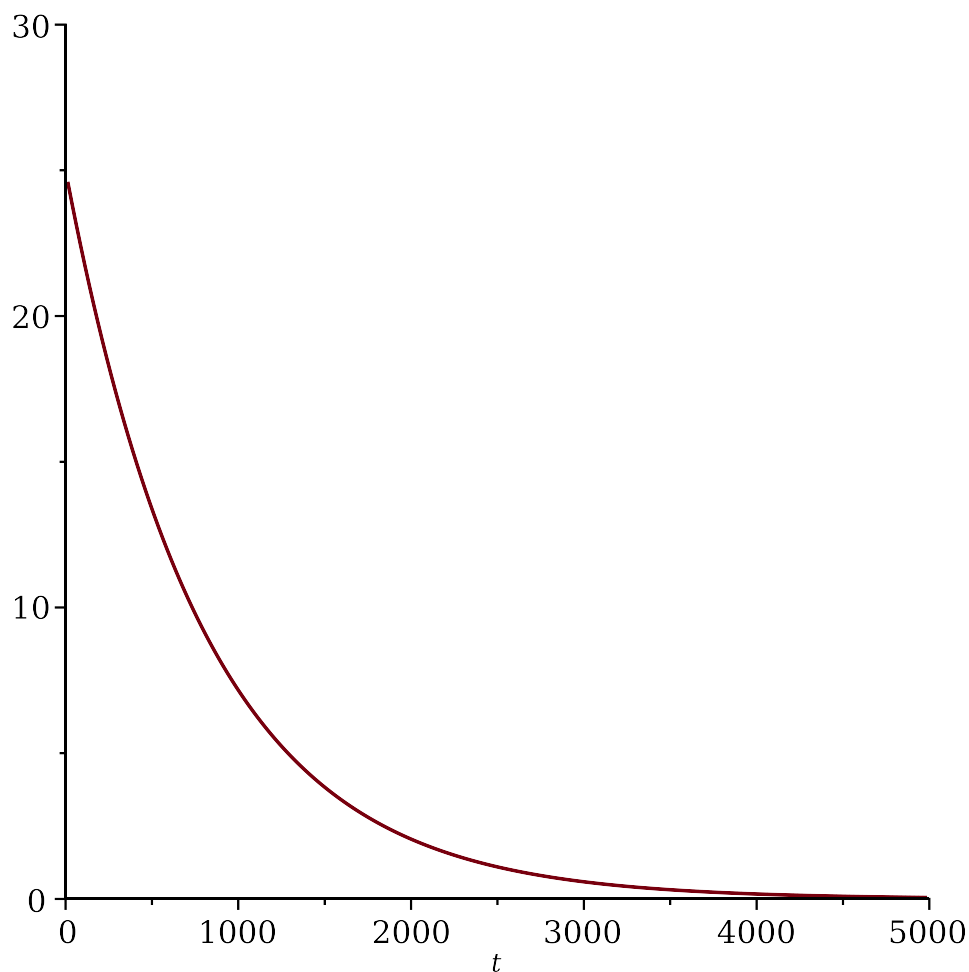
Vi kan tjekke, at funktionen er korrekt, ved at afprøve den ved tider, hvor vi kender mængden af salt. Ved 0 minutter burde der være 25 kg salt. Hvis vi plotter funktionen, burde kurven aftage exponentielt.

$$f(0) = 25$$

Funktionen afspejler de 25 kg salt.

$$\text{plot}(f(t), t = 0..5000, 0..30)$$





Kurvens hældning er eksponentielt aftagende, som vi forventede.

c) Til hvilket tidspunkt er saltindholdet nede på 20 kg?

Vi finder dette, ved at sætte funktionen $f(t)$, der beskriver saltindholdet ved en given tid, lig 20 kg, og løser derefter udtrykket for tiden t .

$$\text{solve}(f(t) = 20, \{t\}) = \{t = 178.5148411\}$$

Vi ved herved, at saltindholdet er 20 kg efter 178.5148411 minutter.



d) Til hvilket tidspunkt er saltindholdet nede på 10 kg?

Igen finder vi dette, ved at sætte funktionen $f(t)$, der beskriver saltindholdet ved en given tid, lig nu 10 kg, og løser derefter udtrykket for tiden t .

$$\text{solve}(f(t) = 10, \{t\}) = \{t = 733.0325855\}$$

Vi ved herved, at saltindholdet er 10 kg efter 733.0325855 minutter.



e) Hvad er saltindholdet efter 5 timer?

Vi finder saltindholdet v ved at regne funktionen med tiden t lig 5 timer konverteret til minutter.

$$t_5 := 5 \cdot 60 = 300$$

$$v := f(t_5) = e^{-0.37500 + 2 \ln(5)}$$

$$\text{evalf}(v) = 17.18223195$$



Vi kan tjekke svarene c, d og e, ved at plotte dem på funktionens kurve.

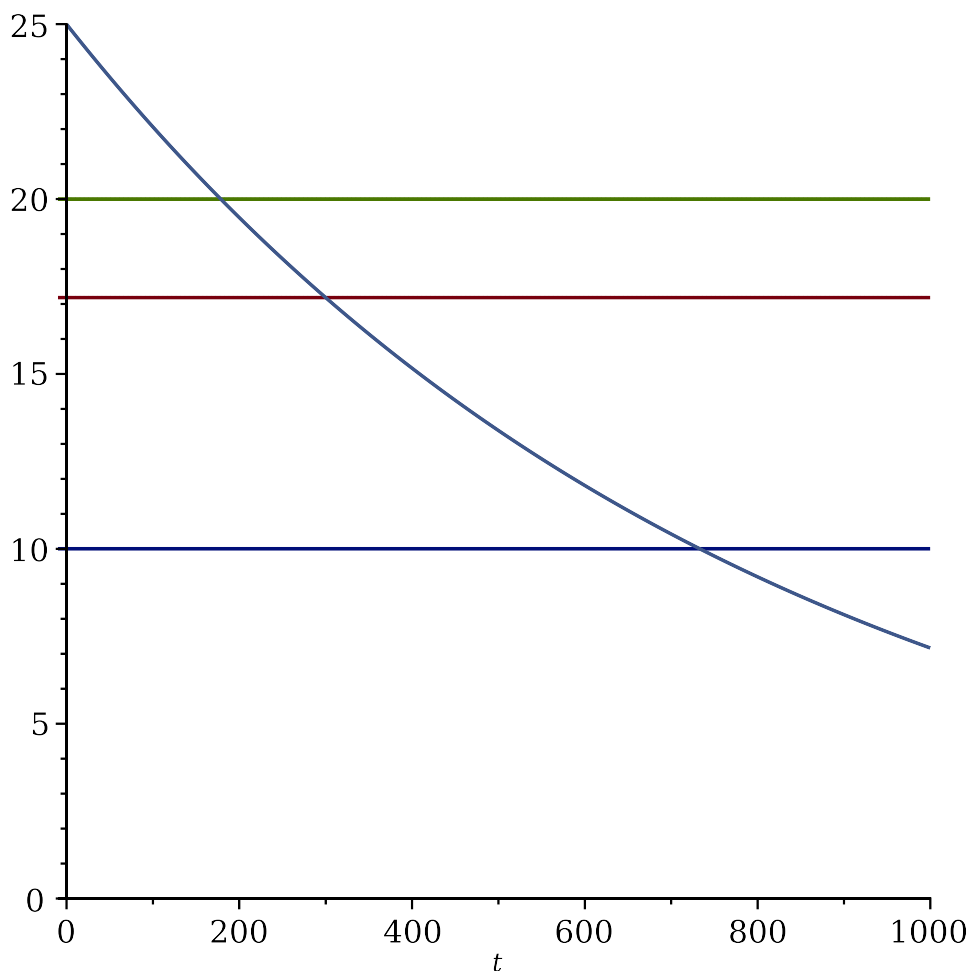
```
 $p_f := \text{plot}(f(t), t = 0..1000, 0..25) :$ 
```

```
 $p_c := \text{plot}(f(178.5148411)) :$ 
```

```
 $p_d := \text{plot}(f(733.0325855)) :$ 
```

```
 $p_e := \text{plot}(f(300)) :$ 
```

```
 $\text{display}(\{p_f, p_c, p_d, p_e\})$ 
```



Vi kan aflæse, at efter lidt tid vil saltindholdet være på 20 kg, og efter mere tid (mere end mellem 0 kg og 20 kg) vil saltindholdet være på 10 kg.

Opgave 2 (Tank B):

Vandet, der løber ind i beholderen, indeholder 0,02 kg salt pr. liter. Vandet løber ind med en hastighed på 1 liter pr. minut. Vandet løber også ud igen med en hastighed på 1 liter pr. minut.

a) Opstil en differentialligning, der opfyldes af funktionen $y = f(t)$, hvor y er saltindholdet som funktion af tiden t .

Eftersom tanken B er på 800 liter, der igen løber 1 liter ud per minut og saltindholdet starter på 25 kg, kan vi bruge beskrivelsen af det faldende saltindhold fra sidste opgave. Denne ændring i henhold til udløbende salt, definerer vi følgende.

$$d_{ud} := 0.00125 \cdot y:$$

Derudover har tanken B også indløbende vand med salt d_{ind} . Eftersom mængden af salt i vandet, der løber ind ikke afhænger af noget (altid 0,02 kg salt per liter og 1 liter i minuttet), bidrager det indløbende vand med en konstant hældning og defineres følgende.

$$d_{ind} := 0.02:$$

Vi opstiller en differentialligning af typen *forskudt eksponentiel vækst*.

$$\frac{dy}{dt} = d_{ind} - d_{ud}$$

$$\frac{dy}{dt} = 0.02 - 0.00125 \cdot y$$



Med udgangspunkt i differentialligningen fra opgave 1, giver det mening at vi tilføjer den indløbende mængde per tidsenhed som en konstant, da der for hver tidsenhed, vil løbe en proportionel mængde ind.

b) Bestem den løsning $f(t)$, der går gennem $(0, 25)$.

Vi ved ovenstående differentialligning ligner følgende.

$$y' = b - a \cdot y$$

Denne type differentialligning (*forskudt eksponentiel vækst*) har følgende

generelle løsning.

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$$

Vi anvender dette på differentiaalligningen.

$$b = 0.02, a = 0.00125$$

$$f(t) := \frac{0.02}{0.00125} + c \cdot e^{-0.00125 \cdot t} :$$

Dette er *den generelle løsning*. For at finde *den specifikke løsning*, anvender vi funktionen i det kendte punkt og løser for den ukendte konstant c .

$$\text{solve}(f(0) = 25, \{c\}) = \{c = 9.\}$$

Herved kan vi definere *den specifikke løsning* gennem punktet $(0, 25)$ følgende.

$$f(t) := \frac{0.02}{0.00125} + 9 \cdot e^{-0.00125 \cdot t} :$$



c) Til hvilken tid er saltindholdet 20 kg?

Vi løser $f(t)$ for t når funktionen er lig 20 kg.

$$\text{solve}(f(t) = 20, \{t\}) = \{t = 648.7441730\}$$

Saltindholdet er 20 kg efter 648.7441730 minutter.



d) Hvad er saltindholdet efter 5 timer?

Vi regner funktionen $f(t)$ når tiden t er 5 timer i form af minutter.

$$t_5 := 5 \cdot 60 = 300$$

$$f(t_5) = 22.18560351$$

Efter 5 timer er saltindholdet 22.18560351 kg.

e) Saltindholdet stabiliserer sig med tiden på et bestemt koncentration [sic.]. Bestem denne koncentration.

Vi ønsker at finde værdien af funktionen $f(t)$ når tiden t går mod uendelig. Vi stiller udtrykket op, på følgende måde.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f(t)) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{0.02}{0.00125} + 9 \cdot e^{-0.00125 \cdot t} \right)$$

Som t nærmer sig ∞ , vil udtrykket $e^{-0.00125 t}$ nærme sig 0. Dette vil resultere i følgende saltindhold v .

$$v := \frac{0.02}{0.00125} = 16.00000000$$

Koncentrationen er 16 kg salt i 800 liter vand, altså $\frac{16.}{800} = 0.0200000000$ kg per liter.

Stabiliseringen, kan man forestille sig, sker, da det vil nærme sig, at alt vandet i tanken vil blive erstattet med vandet, der løber ind. Dette vil resultere i at tankens vand vil have samme koncentration som vandet, der flyder ind. Dette er, hvad vi ser ovenfor.

Opgave 3 (Tank C):

Rent vand løber ind med en hastighed på 2 liter. pr. minut, men der løber kun 1 liter ud pr. minut.

Følgende differentialligning beskriver situationen i beholder C.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-y}{500 + t}, y > 0$$

a) Efter hvor mange minutter er beholderen fyldt?

Vi ved, tanken C starter med 500 liter vand og kan opbevare op til 1000 liter. Vi ved også, at vand løber ind med 2 liter pr. minut, men vand løber ud med 1 liter pr. minut. Resultatet af ind- og udløb er, at der bliver tilføjet $2 - 1 = 1$ liter til tanken pr. minut. Det betyder så, at vi kan simpelt sige, at der mangler $1000 - 500 = 500$ liter for at fylde den op, og med 1 liter pr. minut tager det $1000 - 500 = 500$ minutter. Altså vil tanken være fyldt efter 500 minutter.

b) Hvad er saltindholdet på det tidspunkt, som er fundet i spørgsmål a)

Vi finder den generelle løsning for differentialligningen.

Vi starter med:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-y}{500 + t}$$

Vi flytter t og y på hver sin side:

$$\frac{1}{y} dy = -\frac{1}{500+t} dt$$

Vi integrerer begge sider.

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{1}{500+t} dt = \ln(y) = -\ln(500+t)$$

Vi omskriver, så y står for sig selv.

$$e^{\ln(y)} = e^{-\ln(500+t) + k}$$

$$y = e^{-\ln(500+t) + k}$$

Herfra kan vi finde *den specifikke løsning* ved at bruge et velkendt punkt (0, 25), da vi ved, saltindholdet vil være 25 kg i starten.

$$f(t) := e^{-\ln(500+t) + k} :$$

Vi løser derefter funktionen $f(t)$ for k i tiden 0 når dens værdi, altså saltindholdet er 25 kg.

$$\text{solve}(f(0) = 25., \{k\}) = \{k = 9.433483923\}$$

Vi kan derfor definere *den specifikke løsning* som følgende.

$$f(t) := e^{-\ln(500+t) + 9.433483923} :$$

Vi kan herefter finde saltindholdet på tidspunktet i spørgsmål a), ved at sætte tiden i funktionen.

$$v := f(500) = e^{-3 \ln(10) + 9.433483923}$$

$$\text{evalf}(v) = 12.50000000$$

Altså er saltindholdet 12.50000000 kg på tidspunktet, når tanken er fuld.

Herefter bliver udløbet ligeledes på 2 liter pr. minut.

c) Hvad er saltindholdet efter yderligere 5 timers forløb?

Hertil skal vi bruge en lignende differentialligning, til den vi definerede i opgave 1. Dog er mængden af vand på 1000 liter istedet for 800 og udflydningsraten på 2 istedet for 1 liter pr. minut.

$$d := \frac{2.}{1000} = 0.002000000000$$

Vi opstiller følgende differentialligning, som i opgave 1.

$$\frac{dy}{dt} = -0.002 y$$

??? hvad beviser dette ???

Vi løser derefter differentialligningen, så vi får den generelle løsning.

$$\frac{1}{y} \cdot dy = -0.002 \cdot dt$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -0.002 dt$$

$$\ln(y) = -0.002 t + k$$

$$y = e^{-0.002 t + k}$$

Med den generelle løsning og et kendt punkt (500, 12.5). Punktet kender vi fra b).

$$f(t) := e^{-0.002 t + k} ;$$

$$\text{solve}(f(500) = 12.5, \{k\}) = \{k = 3.525728644\}$$

Den specifikke løsningen definerer vi derfor som følgende.

$$f(t) := e^{-0.002 t + 3.525728644} ;$$

Funktionen gælder, når $t \geq 500$.

Dette kan vi så bruge, til at finde saltindholdet efter de yderligere 5 timer.

$$f(500 + 5 \cdot 60) = 6.860145449$$

d) Hvor længe går der fra starttidspunktet til saltindholdet er mindre end 0,1 kg?

Dette finder vi ud af i 2 faser. Den første er før, tanken er fuld. Den anden er efter, tanken er fuld.

Vi regnede i a) at tanken vil være fuld efter 500 minutter, og i b) at saltindholdet på dette tidspunkt er 12,5 kg.

Siden 0,1 er mindre end 12,5, er vi i den anden fase, hvortil vi genbruger differentialligningen fra c). Vi finder tidspunktet, ved at sætte ligningen lig saltindholdet og løse for tiden t .

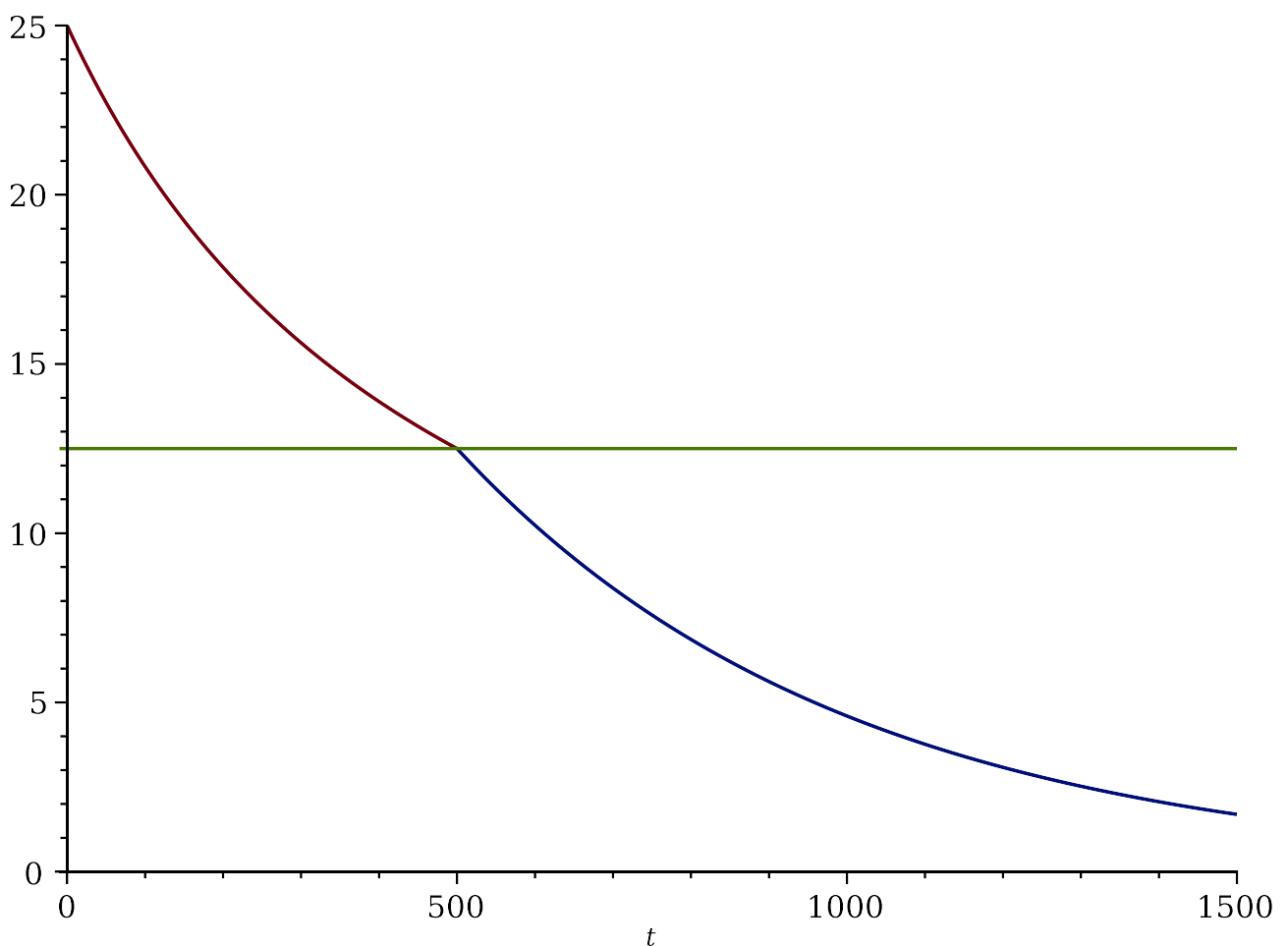
$$\text{solve}(f(t) = 0.1, \{t\}) = \{t = 2914.156868\}$$

Hvis vi var i første fase, før tanken er fuld, ville den brugte differentialligningen ikke give det rigtige svar, men fordi vi er i det rigtige interval, giver den det forventede svar. Derfor går der over 2914.156868 minutter, altså $\frac{2914}{60} = 48.56666667$ timer før at saltindholdet er mindre end 0,1 kg.

$$f_1(t) := e^{-\ln(500+t) + 9.433483923} :$$

$$f_2(t) := e^{-0.002t + 3.525728644} :$$

`display([plot(f1(t), t = 0..500, 0..25), plot(f2(t), t = 500..1500), plot(12.5)])`



Diskussion

Her skal du forholde dig til de resultater, du har fundet frem til i løsningsafsnittet. Vurder, om resultaterne er realistiske i forhold til de oplysninger, du fik i opgaven.

I opgave 1 fandt vi ud af, at tanken ville have 20 kg saltindhold efter 179 minutter og 10 kg efter 733 minutter, hvor tanken startede på 25 kg. Dette vurderer vi til at være realistisk. Det giver mening at faldet fra 25 til 20 kg er forholdsvis hurtigt

sammenlignet med faldet fra 20 kg til 10 kg, da saltindholdets fald faldt over tid, da det er eksponentielt henfald, har at gøre med. De 179 minutter synes vi er realistisk, da udvekslingen af vand kun er 1 liter i minuttet, men saltkoncentrationen alligevel vil falde relativt hurtigt.

Hvis vi bare skulle erstatte vandet i tanken, ville det tage 800 minutter, da vi udveksler 1 liter vand i minuttet. Men pointen er, at vi ikke bare erstatter vandet med nyt vand, istedet tilfører vi og fjerner vand fra tanken, hvor vandet bliver blandet. Derfor giver det mening, at der stadig er 10 kg salt i, selvom vi ville kunne erstatte alt vandet, hvis vi fx hældte alt det gamle ud, på 800 minutter.

Vi fandt løsningen til differentiaalligningen med integration. Vi kunne have brugt den pre-determinerede løsning fra teoriafsnittet. Løsningen og beviset i teoriafsnittet er ikke ens, men kommer frem til samme funktioner.

I opgave 2 har det indløbende vand også et saltindhold. Dette gør at differentiaalligningen ikke er eksponentielt henfald, men istedet forskudt eksponentiel vækst. Svarene i denne opgave er sammenlignelige med opgave 1, men istedetfor at saltindholdet går mod 0, er stabiliseringen forskudt, så den stabiliserer mod det indløbende vands saltindhold. Vi fandt frem til, at saltindholdet ville være 16 kg efter uendelig tid. Dette giver mening, da det svarer til det indløbende vands saltindhold og tankens mængde af vand. Vi burde også se at faldet fra 25 kg til 20 kg, som tager 648 minutter, tager længere tid end i opgave 1, hvor det tager 179 minutter. Faldet er mindre drastisk, fordi netto-saltudvæksling er mindre.

I opgave 3 skal vi også regne med, at tanken bliver fyldt efter noget tid. Vi fandt at det ville tage 500 minutter, da det svarer til det manglende og netto-indløb med udløbet taget i betragtning. Det giver mening at saltindholdet er 12,5 kg efter 500 minutter, da vandmængden er steget til det dobbelte, mens hele den originale mængde er løbet ud, selvom det ikke er klart, at det er præcist halvdelen af det originale saltindhold. Efter udløbet ligeledes bliver 2 liter, når tanken er fuld, forventer vi at henfaldet stiger. Det er også det vi ser, altså at saltindholdet falder hurtigere lige efter, tanken er blevet fuld.

Differentiaalligninger, som vi har brugt dem her, går ud fra ændringen er kontinuert. Det kunne også være muligt i et fysisk tilfælde med vandtanke, at væsken ikke er homogen, forstået på den måde at forskellige dele af væsken har forskellige koncentrationer saltindhold. Væsken i tanken kan også bevæge sig, så noget væske bliver udskiftet, mens andet står stille. Eksempelvis kunne man sammenligne med konvektion, for eksempel ved en radiator.

I matematikkens verden ville saltindholdet aldrig stabilisere. Det ville kræve uendelig tid. Men i virkeligheden ville man, hvis man skulle bruge en bestemt koncentration, træffe en beslutning om hvornår indholdet er indenfor tolerancerne.

Konklusion

I opgaven har vi løst differentiallyigninger, som beskriver hældningen/væksten/henfaldet af saltindholdet i vandtanke. Ved at finde både generelle og specifikke løsninger, er vi kommet frem til funktioner, som beskriver det konkrete saltindhold i vandet i givne tidspunkter. Vi har brugt disse funktioner til at bestemme saltindhold i givne tider og bestemme tidspunkter for givne saltindhold.

Vi har anvendt forskellige slags differentiallyigninger, herunder eksponentiel vækst og forskudt eksponentiel vækst. Der findes mange slags differentiallyigninger, men nogle slags kender man løsningerne på. I opgave 1 fandt vi selv løsningen. I opgave 2 brugte vi en løsning, vi aflæste fra en bog.

Vi har også anvendt flere differentiallyigninger til den samme tank, for at tage højde for, at tanken blev fyldt; altså at forholdene har ændret sig. Her har vi anvendt den ene ligning i det første tidinterval, fundet ud af, hvornår tanken er fuld og benyttet den anden ligning i intervallet efter.

Fin besvarelse

Dog skal I være mere præcise i jeres forklaring i teoriafsnittet
Når I beviser løsningsmodellen for $y' = ky$ og $y' = ay + b$
bruger I produktreglen, men I viser ikke hvordan den anvendes