

restart

Teori

Talfølger

En talfølge er en række af tal. En talfølge kunne se sådan ud:

$$x = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

Man kan så bruge n til at finde et bestemt element i talfølgen:

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = 4$$

$$x_3 = 8$$

Det første element er når $n = 0$

Rekursionsligning

En rekursionsligning kunne se sådan ud:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

Man bruger en rekursionsligning til at beskrive en et givet element i en talfølge.

For at man kan finde et givet element i talfølgen af en rekursionsligning, skal man først bestemme rekursionsligningens orden. Overstående rekursionsligning er af 2. orden. Det vil sige at vi ser 2 iterationer bagud. For at udregne talfølgen i en 2. ordens rekursionsligning, skal man vide to tal fra talfølgen, for eksempel x_0 og x_1 .

I overstående rekursionsligning bestemmer vi at x_0 er 1 og x_1 er 1.

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1$$

Kan vi så for udregne x_2 :

$$x_2 = x_{2-1} + x_{2-2}$$

$$x_2 = x_1 + x_0$$

$$x_2 = 1 + 1 = 2$$

Derefter kan man så bruge x_2 til at udregne x_3 :

$$x_3 = x_2 + x_1$$

$$x_3 = 2 + 1 = 3$$

Homogene og ikke homogene rekursionsligninger

En homogen rekursionsligning er en rekursionsligning hvor en ingen af leddene er en konstant eksempelvis:

$$x_n = x_{n-2} + x_{n-1}$$

En ikke homogen rekursionsligning er en rekursionsligning hvor en a leddene er en konstant:

$$x_n = x_{n-2} + x_{n-1} + k$$

Eksempelvis:

$$x_n = x_{n-2} + x_{n-1} + 10$$

Lineære og ikke lineære rekursionsligninger

En lineær rekursionsligning er, når de rekursive led i rekursionsligning er lineære dvs:

$$x_n = x_{n-2} + x_{n-1}$$

Når en rekursionsligning ikke er lineær er det fordi et af leddene ikke er lineære dvs:

$$x_n = x_{n-2}^2 + x_{n-1}$$

Eller:

$$x_n = x_{n-2} + e^{x_{n-1}}$$

Løsning af homogene lineære rekursionsligninger - Karakterligningen

En homogen lineær rekursionsligning af 1. orden ser sådan ud:

$$x_n = r \cdot x_{n-1}$$

Hvis $x_0 = 1$ gælder det at:

$$x_n = r^n$$

Det kan ses siden at

$$x_1 = r \cdot 1 = r$$

$$x_2 = r \cdot r \cdot 1 = r^2$$

$$x_3 = r^2 \cdot r \cdot 1 = r^3$$

Det vil sige at den generelle løsning til den homogene lineære rekursionsligning af 1. orden kan skrives som:

$$x_n = b \cdot r^n$$

hvor $b \in \mathbb{R}$

Det er den generelle løsning af 1. ordens homogene lineære rekursionsligningen, nu kan man så finde løsningen af k 'te orden homogene lineære rekursionsligning. En homogen lineær rekursionsligning af k 'te orden ser sådan ud:

$$x_n = a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} + \dots + a_k \cdot x_{n-k}$$

Vi antager at løsning fra den 1. ordens ligning $x_n = r^n$ også gælder for den homogene lineære rekursionsligning af k 'te orden.

Der indsættes $x_n = r^n$

$$\frac{r_n}{r^{n+k}} = \frac{a_1 \cdot r^{n-1}}{r^{n-k}} + \frac{a_2 \cdot x_{n-2}}{r^{n-k}} + \dots + \frac{a_k \cdot x_{n-k}}{r^{n-k}}$$

$$r^k = a_1 \cdot r^{k-1} + a_2 \cdot r^{k-2} + \dots + a_k$$

$$0 = r^k - a_1 \cdot r^{k-1} - a_2 \cdot r^{k-2} - \dots - a_k$$

Dette kaldes også karakterligningen.

Newton-Raphsons metode

Newtons-Raphsons metode er en metode til at udregne transcendente ligninger, hvilket er ligninger der ikke kan løses analytisk.

Et eksempel kunne være:

$$x = \cos(x)$$

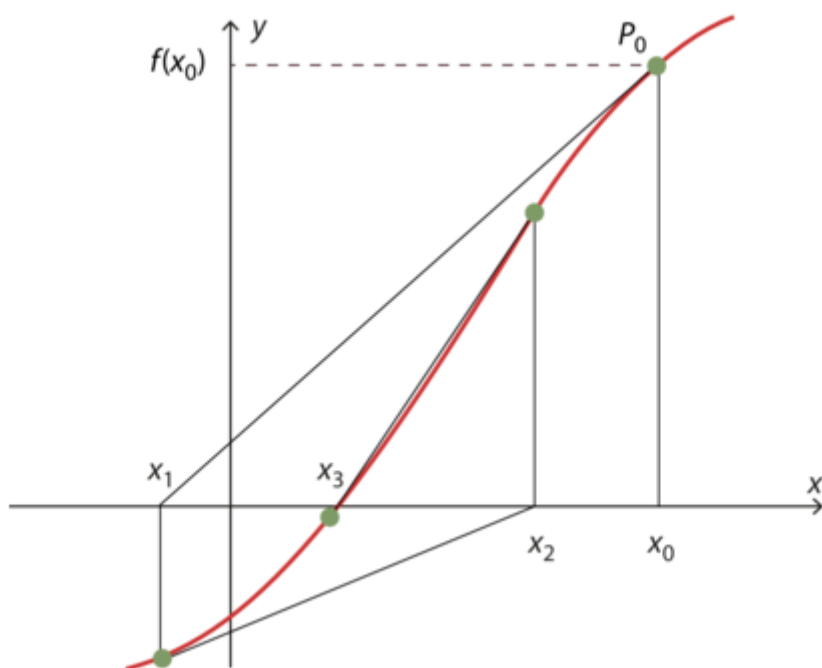
Og det kan jo ikke lade sig gøre, da $x = \cos(x)$ har uendelige løsninger. Men man kan derfor bruge Newton-Raphsons metode.

Vi bruger eksemplet ovenfor og omskriver det til:

$$f(x) = x - \cos(x)$$

Det vil sige at nu vil nulpunktet altså $f(x) = 0$ være løsningen. Det næste man så gør er at gætte. Vi starter med at gætte på x_0 . Det finder man ud til at være forkert, så derfor finder man tangenten af det punkt man rammer altså P_0 på nedenstående billede. Derefter finder man der hvor P_0 's tangent rammer nulpunktet. Det bliver så til vores x_1 . Og så gør man det hele igen og igen indtil

forskellen mellem det sidste og det næstsidste gæt er tilpas lille.



Før man kan bruge Newton-Raphsons metode skal man have en måde at udregne det næste gæt, altså der hvor det tidligere gæts tangent skærer nulpunktet. Hældningen kan beregnes med differentiaalkvotienten $f'(x_0)$

$$\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0) \quad \text{Hvorfor kan den beregnes således?}$$

$$\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - x_1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Dette kan derefter omskrives til følgende rekursionsligning

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$



Opgave 1

Fibonacci-talfølgen

Fibonacci-spiralen, som baserer sig på Fibonacci-talfølgen en tilnærmelsesvis gylden spiral, der optræder i plante- og dyreriget. Sneglehuset på billedet



Figur 5.25 Sneglehus
iStockphoto.com/amphotora

har en spiralfaçon, der tilnærmelsesvis kan beskrives ved en Fibonaccispiral. Her ses begyndelsen på Fibonacci-talfølgen:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Følgende rekursionsligning kan bruges til at beskrive Fibonacci-talfølgen:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

a. Bestem værdien af hhv. x_0 og x_1

Vi kan se at $x_0 = 0$ og $x_1 = 1$ eftersom de er de første værdier i begyndelsen af talfølgen ✓

b. Redegør for, at der er tale om en lineær homogen rekursionsligning af anden orden

Ligningen er en rekursionsligning, eftersom den beskriver en talrække hvor en tidligere iteration af ligningen er involveret i at udregne den nuværende værdi. ✓

En rekursionsligning er homogen hvis ligningen kun inkluderer summe af $c \cdot x_{n-k}$, hvor c er et vilkårligt tal, og k er et vilkårligt heltal. Dvs. at der ikke er en konstant involveret i summen, som der ville være i f.eks. $x_n = x_{n-1} + k$, $k \neq 0$. ✓

(not sjør) En rekursionsligning er lineær hvis den ikke har en eksponent i dens definition - altså f.eks. er $x_n = x_{n-1}$ lineær, men $x_n = x_{n-1}^2$ ikke lineær. ✓

En rekursionsligning er af en anden orden hvis den kun går 2 iterationer tilbage, et eksempel på en rekursionsligning af k orden kunne være

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + \dots + x_{n-k}$$

c. Beregn de første 25 værdier af Fibonacci-talfølgen ✓

Vi kender allerede de 8 første værdier til at være 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13. Dvs. vi kan starte fra $x_6 = 8$ og $x_7 = 13$, og rent slavisk bruge ligningen $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ til at udregne værdierne op til x_{24} .

$$\begin{aligned}
 x_8 &:= 13 + 8 = 21 \\
 x_9 &:= x_8 + 13 = 34 \\
 x_{10} &:= x_9 + x_8 = 55 \\
 x_{11} &:= x_{10} + x_9 = 89 \\
 x_{12} &:= x_{11} + x_{10} = 144 \\
 x_{13} &:= x_{12} + x_{11} = 233 \\
 x_{14} &:= x_{13} + x_{12} = 377 \\
 x_{15} &:= x_{14} + x_{13} = 610 \\
 x_{16} &:= x_{15} + x_{14} = 987 \\
 x_{17} &:= x_{16} + x_{15} = 1597 \\
 x_{18} &:= x_{17} + x_{16} = 2584 \\
 x_{19} &:= x_{18} + x_{17} = 4181 \\
 x_{20} &:= x_{19} + x_{18} = 6765 \\
 x_{21} &:= x_{20} + x_{19} = 10946 \\
 x_{22} &:= x_{21} + x_{20} = 17711 \\
 x_{23} &:= x_{22} + x_{21} = 28657 \\
 x_{24} &:= x_{23} + x_{22} = 46368
 \end{aligned}$$



Herunder ses Binets formel, der kan beregne en vilkårlig værdi i Fibonacci-talfølgen:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

d. Brug Binets formel til at beregne det 18., 19. og 20. tal i Fibonacci-talfølgen

$$x_{18} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{18} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{18} \right) = 2583.999979$$

$$x_{19} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{19} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{19} \right) = 4180.999964$$



$$x_{20} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{20} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{20} \right) = 6764.999935$$

Dette er tal nr
19, 20 og 21

e. Sammenlign svaret fra d. med de tilsvarende værdier fra svaret i opgave c.

De får de samme resultater, udover at man lige skal runde op først, formentligst pga. Maple mangler præcision.



f. Med udgangspunkt i rekursionsligningen $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, skal du vise, hvordan Binets formel fremkommer.

Vi ved at det gælder for en lineær homogen rekursionsligning af k te orden:

$$x_n = a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} + \dots + a_k x_{n-k}$$

At den har karakterligningen

$$r^k - a_1 \cdot r^{k-1} - a_2 \cdot r^{k-2} - \dots - a_k \cdot r^{k-k} = 0$$

Hvis den har k reelle løsninger, gælder det også at:

$$x_n = b_1 \cdot r_1^n + b_2 \cdot r_2^n + \dots + b_k \cdot r_k^n$$

Vi starter med at opstille og løse karakterligningen for vores rekursionsligning. Den burde gerne have 2 reelle løsninger:

$$\text{solve}(r^2 - 1 \cdot r^1 - 1 \cdot r^0) = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$$

Dem kalder vi r_1 og r_2 :

$$r_1 := \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} :$$

$$r_2 := \frac{-\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} :$$

Vi kan nu opstille vores generelle løsning:

$$x_n = b_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^n + b_2 \cdot \left(\frac{-\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^n$$

Vi kender ikke endnu b_i , men vi kan vælge 2 kendte værdier af x_n , f.eks. x_0 , x_1 og sætte deres værdier ind. Nu har vi så i stedet 2 ligninger med 2 ubekendte, som vi kan løse.

$$L_1 := 0 = b_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^0 + b_2 \cdot \left(\frac{-\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^0 :$$

$$L_2 := 1 = b_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^1 + b_2 \cdot \left(\frac{-\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^1 :$$

$$\text{solve}(\{L_1, L_2\}) = \left\{ b_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}, b_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5} \right\}$$

Her kan vi så se at $b_1 = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{5}$ og at $b_2 = -\frac{1}{5} \cdot \sqrt{5}$

Vi har nu vores specifikke løsning:



Opstilt

$$x_n = \left(\frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^n + \left(-\frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} \right) \cdot \left(\frac{-\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^n$$

Flyt under samme streg

$$x_n = \left(\frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} \right) \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(-\frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} \right) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Flyt minustegnet fra b_2 ud

$$x_n = \left(\frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} \right) \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} \right) \cdot (-1) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Vi ganger med $\left(\frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} \right)$ i begge sider af ledet, så vi kan flytte gange ind i

parentes

$$x_n = \left(\frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} \right) \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Vi ophæver så den venstre parentes

$$x_n = \frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Vi flytter $\sqrt{5}$ over $\frac{1}{5}$

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Regneregler fortæller os at $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$, ergo $\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Som så får os frem til Binet's formel.

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$



Opgave 2

restart

Bagermester Knud Bifonacci, der er berømt for sine gyldne snegle, har planer om at bygge et nyt bageri.

Han har derfor brug for et lån på 5.000.000 kr. til finansiering af byggeriet.

Lånet afdrages med 250.000 kr. om året.

Lånerenten i hele perioden er 3%.

g. Opstil en rekursionsligning, hvis løsning beskriver tilbagebetalingen af Knud Bifonaccis lån.

Vores gæld for den nuværende gæld, g_n , er defineret som den tidligere gæld, g_{n-1} , som nu er steget med 3%, altså $g_{n-1} \cdot (1 + 3\%)$, minus afdraget, altså $g_n = g_{n-1} \cdot 1.03 - 250000$

h. Redegør for, at der er tale om en ikke-homogen, lineær rekursionsligning.

En ligning er lineær, så længe at ingen af de tidligere værdier, f.eks. x_{n-1} ikke er eksponentiel. (✓)

En ligning er homogen, hvis leddende i ligningen kun er værdier af $k \cdot x_{n-i}$ hvor k er et vilkårligt tal og i er et vilkårligt heltal. Hvis en af leddende er en konstant, er den derfor ikke homogen. ✓

Eftersom vores rekursionsligning har et konstant led, og ikke har eksponentielle tal, er den derfor ikke homogen og lineær. ✓

i. Find ved at opstille en beregning i MS excel ud af, hvor lang tid, der går inden lånet er tilbagebetalt.

A	B
år	gæld
0	5000000.00
1	4900000.00
2	4797000.00
3	4690910.00
4	4581637.30
5	4469086.42
6	4353159.01
7	4233753.78
8	4110766.40
9	3984089.39
10	3853612.07
11	3719220.43
12	3580797.04
13	3438220.96
14	3291367.58
15	3140108.61
16	2984311.87
17	2823841.23
18	2658556.46
19	2488313.16
20	2312962.55
21	2132351.43
22	1946321.97
23	1754711.63
24	1557352.98
25	1354073.57
26	1144695.77
27	929036.65
28	706907.75
29	478114.98
30	242458.43
31	-267.82

Vi kan se, at gælden vil blive afbetalt efter 31 år, med 267.82 kner i rest.



j. Undersøg, hvor lang tid det vil tage, hvis renten i hele perioden er 4%.

A	B
år	gæld
0	5000000.00
1	4950000.00
2	4898000.00
3	4843920.00
4	4787676.80
5	4729183.87
6	4668351.23
7	4605085.28
8	4539288.69
9	4470860.23
10	4399694.64
11	4325682.43
12	4248709.73
13	4168658.12
14	4085404.44
15	3998820.62
16	3908773.44
17	3815124.38
18	3717729.36
19	3616438.53
20	3511096.07
21	3401539.91
22	3287601.51
23	3169105.57
24	3045869.79
25	2917704.59
26	2784412.77
27	2645789.28
28	2501620.85
29	2351685.69
30	2195753.11
31	2033583.24
32	1864926.57
33	1689523.63
34	1507104.57
35	1317388.76
36	1120084.31
37	914887.68
38	701483.19
39	479542.51
40	248724.22
41	8673.18
42	-240979.89

Her vil det i stedet tage 42 år, med 240979.89 kroner i overskud.



k. Løsningen af rekursionsligningen viser sig at være:

$$x_n = -3333333 \cdot 1.03^n + 8333333$$

Undersøg ved hjælp af Newton-Raphsons metode, hvor mange år der

skal gå, inden Knud Bifonacci har tilbagebetalt lånet og sammenlign med resultatet fra i).

Først så sætter vi vores ligning op, som vi kender den. Vi vil gerne vide hvor mange år n , der går før at vores gæld x_n er afbetalt.

$$0 = -3333333 \cdot 1.03^n + 8333333$$

Vi kan så opfatte vores ligning til at være ligesom en funktion:

$$f(x) := -3333333 \cdot 1.03^x + 8333333 :$$

$$f(x) = -3333333 \cdot 1.03^x + 8333333$$

Hvis vi så finder x , hvor $f(x) = 0$, må det være vores svar.

Det gør vi ved hjælp af Newton-Raphsons metode. I teoriafsnittet fandt vi frem til at man kunne beskrive Newton-Raphsons metode som en rekursionsligning:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Vi finder derfor $f'(x)$: $f'(x) = -98529.33095 \cdot 1.03^x$

Og sætter vores startværdi. Vi vælger helt tilfældigt 20 år her.

Så er det bare om at komme i gang.

Vi udregner den nuværende iteration:

$$x_0 := 20 :$$

Og tjekker om den er tilpas tæt på 0:

$$f(20) = 2.312962819 \times 10^6$$

Det er den ikke, så derfor prøver vi igen:

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 32.99746401$$

$$f(x_1) = -507120.866$$

Vi prøver igen.

$$x_2 := x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 31.05680119$$

$$f(x_2) = -14270.979$$

Undsoweiter

$$x_3 := x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 30.99896428$$

$$f(x_3) = -12.190$$

$$x_4 := x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 30.99891479$$

$$f(x_4) = 0.$$

Vi får så derfor svaret til at være $x_4 = 30.99891479$. Det virker meget tilpas, eftersom vi i opgave i), fandt frem til at der efter 31 år var et overskud på ca. -267.82, ville det give god mening at det rigtige svar var meget tæt på 31.



Diskussion

I opgave 1 redegjorde vi for, at de første to værdier af en talfølge er x_0 og x_1 og forklarede hvorfor rekursionsligningen af fibonacci-talfølgen var en homogen lineær rekursionsligning. Derefter skulle vi beregne de første 25 værdier af fibonacci-talfølgen og fandt ud af at den 25. værdi var 46368, hvilket giver mening efter de to tidligere værdier var 28657 og 17711, hvilket tilsammen giver 46368. Bagefter brugte vi binets formel til at udregne det 18. 19. og 20. tal i fibonacci-talfølgen. Det sammenlignede vi med de 25 værdier vi havde fundet tidligere og fandt ud af at maple ikke kunne udregne så præcise tal, så der skulle afrundes. Bagefter skulle finde frem til, hvordan binets formel fremkommer, så vi brugte karaktereligningen fra teoriafsnittet til at beregne den generelle løsning af rekursionsligningen. Bagefter fandt vi de to b_1 og b_2 ved at løse to ligninger med to ubekendte. Så fandt vi ud af at den er præcis ligesom binets formel, det vil sige vi har vist hvordan binets formel fremkommer

Opgave 2 handlede om Bagermester Bifonacci og hans lån til et byt bageri. Først opstillede vi en rekursionsligning for lånet på 5 millioner kr. bagefter redegjorde vi for, hvorfor rekursionsligningen var ikke-homogen lineær. Det var den selvfølgelig fordi at der var en konstant indblandt. Så skulle vi finde ud hvor lang tid det ville tage for at Bagermesteren ville have sit lån betalt ved hjælp af excel. Vi satte så en tabel op og fandt ud af det ville tage 31 år med en lille shat penge i overskud. Det giver god mening siden 5.000.000 divideret med de 250.000 han betaler om måneden giver 20 år. Så passer det meget godt med at de 3 procent i rente gør det 11 år længere. Så skulle vi også undersøge hvor lang tid det ville tage hvis renten var på 4 procent. Det fandt vi ud til at være 42 år. Det giver også god mening at når procenten stiger tager det 11 år mere. I starten vil renten han skal betale være på 200.000 kroner hvilket er størstedelen af hvad han indbetaler til sit lån om året. derfor gør 1 procent mere i rente en så stor forskel. I sidste opgave skulle vi så bruge Newton-Raphsons metode til at udregne bagemesterens låns varighed. Det gjorde vi og fandt ud af at det var lige under 31 år. Siden vi i opgave inden fandt ud af at lånet varede 31 år med en lille shat penge til overs, passer det meget godt at lånets varighed ved hjælp af Newton-Raphsons metode ville være lige under 31 år.



Konklusion

I opgaven har vi lavet og løst forskellige slags rekursionsligninger til fibonacci-talfølgen. Vi har brugt rekursionsligninger til at finde ud af værdier i specifikke steder i fibonacci talfølgen. Vi har igennem vores teori afsnit brugt forskellige formler til at håndtere rekursionsligningerne.

Så har vi hjulpet Bagermester Knud Bifonacci til han undersøge låns omkostninger og varighed, da han gerne vil åbne et nyt bageri.