

HTX

TEKNISK
STUDENTEREKSAMEN



BØRNE- OG
UNDERVISNINGSMINISTERIET
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

MATEMATIK A

Forberedelsesmateriale

Materialet udleveres:
Mandag den 2. december 2024

Forberedelsesmateriale til prøverne i matematik A

Der er afsat 10 timer på 2 dage til arbejdet med forberedelsesmaterialet til prøverne i matematik A. Oplægget indeholder teori, eksempler og opgaver i et emne i forlængelse af kernestoffet.

Dele af materialet uddybes i et appendiks. Dette appendiks indgår ikke i den skriftlige prøve.

Forberedelse til den skriftlige 5-timersprøve: Nogle af spørgsmålene ved 5-timersprøven tager udgangspunkt i det materiale, der findes i dette oplæg. De øvrige spørgsmål omhandler emner fra kernestoffet.

Forberedelse til den mundtlige prøve: Emnet, behandlet i dette materiale, indgår som supplerende stof. Der vil derfor være spørgsmål ved den mundtlige prøve i dette emne.

I forberedelsesperioden er alle hjælpemidler tilladt, og det er tilladt at modtage vejledning.

Billedmateriale uden kildeangivelse er opgavekommissionens ejendom.

Bézierkurver

1 Indledning

En designer, der skal formgive, vil gerne tegne. En computer er god til tal og beregninger. For at designeren kan bruge computeren i designprocessen, er der derfor brug for en måde at behandle tegninger på, der både er visuel, så det er nemt for designeren, og samtidig let lader sig oversætte til tal og formler, og hertil kan man benytte de såkaldte bézierkurver.

En bézierkurve er en kurve givet ved en særlig parameterfremstilling.

Den er bestemt af såkaldte kontrolpunkter, der giver en nem og intuitiv måde at definere kurven på. Derfor er bézierkurver en vigtig komponent af *computer aided design* og *computer aided manufacturing*.

Det matematiske grundlag for bézierkurver blev udviklet af franskmænden Paul de Casteljau i 1959. Paul de Casteljau var matematiker og fysiker og arbejdede for Citroën. Det var dog en anden franskmænd, ingeniøren Pierre Étienne Bézier, som populariserede den type kurver, der nu bærer hans navn.

Bézierkurver anvendes i computergrafik og mere specifikt i den slags grafik, som kaldes vektorgrafik. For eksempel understøtter grafikformatet *svg* bézierkurver. Desuden er konturerne af hvert eneste bogstav i dette forberedelsesmateriale stykket sammen af sådanne kurver. Fordi kurverne er givet ved en matematisk formel, betyder det, at man kan zoome lige så meget ind på et bogstav, som man har lyst til, og det vil stadig fremstå skarpt og uden pixellering. Dette gælder ikke kun materialet her, men for alle dokumenter sat med såkaldte TrueType fonte såvel som Type 1 fonte.

Vi har to primære mål med dette materiale. For det første at forstå geometrien af lineære og kvadratiske bézierkurver, og for det andet at forstå, hvordan flere kurver kan stykkes sammen, så man får et fleksibelt redskab til at designe kurver.

2 Kurver i planen

For at forstå hvad en bézierkurve er, har vi først brug for at vide, hvad en parameterfremstilling for en kurve er, og det er præcist det emne, vi vil behandle i dette afsnit. Vi vil nøjes med at se på kurver i planen, men hvad forstås egentligt ved planen? I dette materiale vil vi tænke på mængden af talpar, $(x_1; x_2)$, hvor $x_1 \in \mathbb{R}$ og $x_2 \in \mathbb{R}$, som planen. Mængden af sådanne talpar betegnes med $\mathbb{R}^2$. Element $\mathbf{x} = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$ vil vi kalde et punkt i planen.

Bemærk at vi i dette materiale taler om en første- og andenakse (og ikke en x - og en y -akse) og bruger tal-indeks til at skelne mellem dem. Så vi skriver fx $\mathbf{x} = (x_1; x_2)$, og $\mathbf{y} = (y_1; y_2)$, og her er x_1 og y_1 førstekoordinater, mens x_2 og y_2 er andenkoordinater.

Vi kan foretage beregninger med elementerne i $\mathbb{R}^2$. For eksempel sætter man $(2; 3) + (-1; 5) = (2 - 1; 3 + 5) = (1; 8)$. Mere generelt, givet $\mathbf{x} = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$ og $\mathbf{y} = (y_1; y_2) \in \mathbb{R}^2$, sætter man $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2)$.

Vi kan også gange elementerne i $\mathbb{R}^2$ med et tal og få et nyt element i $\mathbb{R}^2$. For eksempel har vi $5 \cdot (1; 3) = (5; 15)$, og $0 \cdot (2; 3) = (0; 0)$. Den generelle definition på multiplikation af tallet $t \in \mathbb{R}$ på $\mathbf{x} = (x_1; x_2)$, er $t\mathbf{x} = (tx_1; tx_2)$.

Desuden skriver man kort $-\mathbf{x}$ for -1 gange $\mathbf{x}$, og man sætter $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ til $\mathbf{x} + (-1)\mathbf{y}$, hvilket svarer til at $(x_1; x_2) - (y_1; y_2) = (x_1 - y_1; x_2 - y_2)$.

Endelig bruger vi symbolet $\mathbf{0}$ til at angive $(0; 0)$. Så $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, betyder $x_1 = 0$ og $x_2 = 0$.

Med disse regneoperationer bliver $\mathbb{R}^2$ til et såkaldt vektorrum. Så vi kan tænke på $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ som enten et punkt eller en stedvektor. Altså, vi vil ikke skelne mellem et punkt, punktets koordinater og stedvektoren.

Lad I være et interval, og lad $\mathbf{k} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ være en afbildning. Det vil sige, at for hvert $t \in I$ tilknyttes et element $\mathbf{k}(t) = (k_1(t); k_2(t)) \in \mathbb{R}^2$. Specielt er $k_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ og $k_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ funktioner. Så en afbildning $\mathbf{k} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definerer to funktioner, som vi vil kalde *koordinatfunktioner*.

Man kan også gå den anden vej således at givet to funktioner $k_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ og $k_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$, kan vi definere en afbildning $\mathbf{k} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ved at sætte $\mathbf{k}(t) = (k_1(t); k_2(t))$ for $t \in I$.

Vi siger, at afbildningen $\mathbf{k}$ er *kontinuert*, hvis og kun hvis de to koordinatfunktioner k_1 og k_2 er kontinuerte.

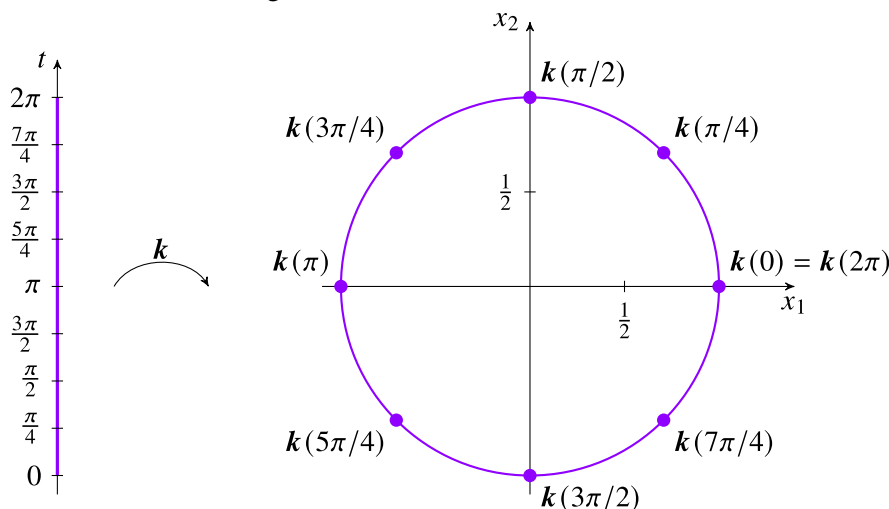
Definition 1. Lad I være et interval. En kontinuert afbildning $\mathbf{k} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ kaldes en kurve i planen.

Eksempel 1

Lad $\mathbf{k}(t) = (\cos(t); \sin(t))$, for $t \in [0; 2\pi]$. Når t gennemløber intervallet fra 0 til 2π , gennemløbes cirklen med radius 1 og centrum $(0; 0)$. Vi siger, at $\mathbf{k}$ er en parameterfremstilling for cirklen, og man siger også, at $\mathbf{k}$ parametriserer cirklen. Her følger nogle sammenhørende værdier for t og $\mathbf{k}(t)$.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\mathbf{k}(t)$	$(1; 0)$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(0; 1)$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(-1; 0)$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(0; -1)$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(1; 0)$

Situationen er illustreret i Figur 1.

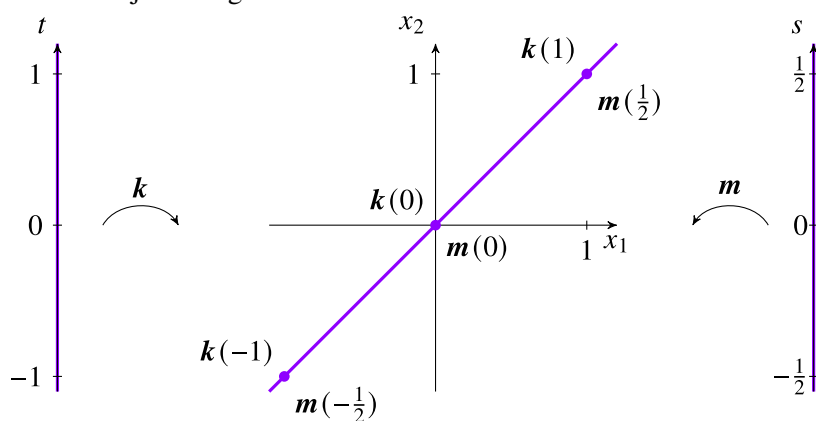


Figur 1. Afbildningen $k(t) = (\cos(t); \sin(t))$, $t \in [0; 2\pi]$ parametriserer cirklen med radius 1 og centrum i origo. Til venstre ses definitionsområdet for k , nemlig intervallet $[0; 2\pi]$. Til højre ses billede af intervallet under k , nemlig cirklen. Der er også angivet støttesteder $(x_1; x_2) = k(t)$, for $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots, 2\pi$. Det er de støttesteder, der er angivet i tabellen fra før.

Eksempel 2

Vi definerer en kurve ved at sætte $k(t) = t(1; 1) = (t; t)$, $t \in \mathbb{R}$. Når t gennemløber $\mathbb{R}$, så gennemløber $k(t)$ linjen med ligningen $x_2 = x_1$, fordi både x_1 og x_2 er lig med t og dermed lig hinanden. (Hvis vi havde brugt et (x, y) -koordinatsystem, ville ligningen have været $y = x$). Samtidig kan en vilkårlig værdi af x_1 antages, så hele linjen gennemløbes. Man siger derfor, at k er en *parameterfremstilling* for linjen.

Vi kunne i stedet have sat $m(s) = (2s; 2s)$, $s \in \mathbb{R}$. Denne (nye) afbildning parametriserer den samme linje. Se Figur 2.



Figur 2. Afbildningen $k(t) = (t; t)$, $t \in \mathbb{R}$ parametriserer linjen med ligningen $x_2 = x_1$. Det samme gør $m(s) = (2s; 2s)$.

Opgave 1

Lad $\mathbf{c} = (2; 0)$ og $\mathbf{v} = (2; -1)$, og definer kurven $\mathbf{k}$ ved

$$\mathbf{k}(t) = t\mathbf{v} + \mathbf{c}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Udfyld følgende tabel med sammenhørende værdier for t og $\mathbf{k}(t)$.

t	-2	-1	0	1	2
$\mathbf{k}(t)$	$(-2; 2)$				

b) Indtegn punkterne i et koordinatsystem.

c) Punkterne ligger på en linje. Bestem en ligning for denne linje.

For at få en intuitiv fornemmelse af en kurves forløb kan vi forestille os, at $\mathbf{k}(t)$ angiver positionen af en partikel til tiden t . Når tiden går, svarende til at t gennemløber et interval, så vil positionen af partiklen ændres. Da kurven er kontinuert, vil partiklens position ikke springe fra et sted til et andet. Man kan så stille spørgsmålet, om hvorvidt en partikel har en hastighed i et givet punkt? Det viser sig at give mening at tillægge partiklen en hastighed til tiden t , når kurven er differentiabel.

Definition 2. En kurve $\mathbf{k} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ i planen kaldes differentiabel i t_0 , hvis de to koordinatfunktioner k_1 og k_2 begge er differentiable i t_0 , og i givet fald sættes

$$\mathbf{k}'(t_0) = (k'_1(t_0); k'_2(t_0)).$$

Hvis $\mathbf{k}$ er differentiabel for alle $t \in I$, siger man simpelthen, at $\mathbf{k}$ er differentiabel.

Når $\mathbf{k}$ er differentiabel, kan det være nyttigt at tænke på vektoren $\mathbf{k}'(t)$ som en hastighed. Hvad sker der, hvis hastigheden $\mathbf{v}$ er konstant? Så er kurven på formen $\mathbf{k}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$, hvor $\mathbf{p}_0 = \mathbf{k}(0)$ og $\mathbf{v}$ er konstanter. Som man ville gætte på, og som vi så i Opgave 1, er dette en parameterfremstilling for en linje.

Eksempel 3

Hvis $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, så er $\mathbf{k}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v}$ en parameterfremstilling for en linje. Sæt $\mathbf{p}_1 = \mathbf{k}(1) = \mathbf{p}_0 + \mathbf{v}$. Så må linjen være den linje, der går gennem $\mathbf{p}_0$ og $\mathbf{p}_1$, fordi $\mathbf{k}(0) = \mathbf{p}_0$, og $\mathbf{k}(1) = \mathbf{p}_1$.

Vi kan fjerne $\mathbf{v}$ fra parameterfremstillingen ved at bruge at $\mathbf{v} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$. Så får vi

$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{v} = \mathbf{p}_0 + t(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) = (1 - t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1.$$

Der gælder også, at hvis $\mathbf{p}_0$ og $\mathbf{p}_1$ er forskellige punkter ($\mathbf{p}_0 \neq \mathbf{p}_1$), så er parameterfremstillingen $\mathbf{k}(t) = (1 - t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1$, $t \in \mathbb{R}$ en parametrisering af en linje, der går gennem $\mathbf{p}_0$ (for $t = 0$) og $\mathbf{p}_1$ (for $t = 1$).

En differentiabel kurve har en *tangent* for ethvert t_0 , hvor $\mathbf{k}'(t_0) \neq \mathbf{0}$.

Definition 3. Lad $\mathbf{k}(t)$ være en kurve, der er differentiabel i t_0 . Sæt $\mathbf{c} = \mathbf{k}(t_0)$ og $\mathbf{v} = \mathbf{k}'(t_0)$. Hvis $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, så er

$$\mathbf{T}_{t_0}(t) = \mathbf{c} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R},$$

en parameterfremstilling for tangenten til kurven for $t = t_0$.

Eksempel 4

Lad os vende tilbage til kurven $\mathbf{k}(t) = (\cos(t); \sin(t))$ fra Eksempel 1, og finde en parameterfremstilling for tangenten i punktet $t_0 = \frac{\pi}{4}$. Vi har

$$\mathbf{c} = \mathbf{k}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Når vi differentierer $\mathbf{k}$, får vi

$$\mathbf{k}'(t) = (-\sin(t); \cos(t)).$$

Specielt gælder der

$$\mathbf{v} = \mathbf{k}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Så en parameterfremstilling for tangenten er

$$\mathbf{T}_{\frac{\pi}{4}}(t) = \mathbf{c} + t\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + t\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Hvis koordinatfunktionerne k_1 og k_2 er polynomier, så er $\mathbf{k}$ differentiabel. Sådanne kurver, der kaldes polynomielle kurver, er vigtige for os. Vi skal snart se, at bézierkurver er polynomielle kurver.

Du har allerede set eksempler på polynomielle kurver, for kurverne i Eksempel 2 og Opgave 1 var polynomielle kurver. Til gengæld var cirklen i Eksempel 1 ikke polynomiell. Den næste opgave viser, at selv for polynomielle kurver, kan vi ikke være sikre på, at der er en tangent i et punkt $\mathbf{k}(t_0)$, medmindre $\mathbf{k}'(t_0) \neq \mathbf{0}$.

Opgave 2

Lad $\mathbf{k}(t) = (t^3; t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Beregn $\mathbf{k}'(t)$.

b) Bestem en parameterfremstilling for tangenten gennem $\mathbf{k}(1)$.

Det viser sig, at $\mathbf{k}$ ikke har en tangent i $\mathbf{k}(0) = \mathbf{0}$.

c) Hvad er $\mathbf{k}'(0)$?

- d) Illustrer situationen ved at tegne kurven og tangenten fundet i b). Læg mærke til at kurven har en såkaldt spids i punktet $(0; 0)$, altså der hvor den ikke har en tangent.

Her til sidst i dette afsnit vil vi se på en lille teknisk udfordring, nemlig differentiability i et endepunkt af et interval. Når man taler om differentiability af en funktion f i et punkt t_0 , vil man typisk kræve, at funktionen er defineret i et interval omkring punktet. Det betyder, at man normalt skal være forsigtig, når man har at gøre med en funktion $f(t)$, $t \in [a; b]$ defineret på det lukkede interval $[a; b]$, for hvad vil differentiability sige i endepunkterne a og b ? Men hvis f er (for eksempel) et polynomium, kan vi undvige disse problemer, fordi forskriften for f (altså polynomiet), giver mening på hele $\mathbb{R}$. Så vi kan udvide definitionsområdet til hele $\mathbb{R}$, og så er der ingen problemer med at differentiere i endepunkterne a og b .

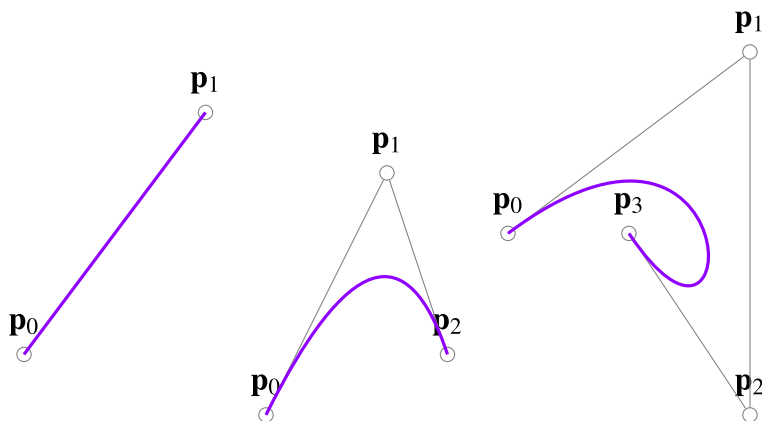
Eksempel 5

Betragt funktionen $f(t) = t^2 + 2t$, $t \in [0; 1]$. Forskriften giver mening for alle $t \in \mathbb{R}$, og den afledede er $f'(t) = 2t + 2$. Så vi tillader os at sige, at f er differentiable på det lukkede interval $[a; b]$, og den afledede her er $f'(t) = 2t + 2$.

Bemærk at det betyder, at en polynomiell kurve $k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ også er differentiable i endepunkterne, og hvis den afledede er forskellig fra $\mathbf{0}$, har kurven tangenter i disse punkter.

3 Lineære bézierkurver i planen

En bézierkurve i planen er en polynomiell kurve defineret ud fra endelig mange kontrolpunkter $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$. Vi præciserer snart, hvordan sammenhængen mellem kontrolpunkter og kurven er, men vi starter med nogle eksempler.



Figur 3. En bézierkurve givet ved to kontrolpunkter, en givet ved tre kontrolpunkter og en givet ved fire kontrolpunkter. Bézierkurverne er optegnet med lilla.

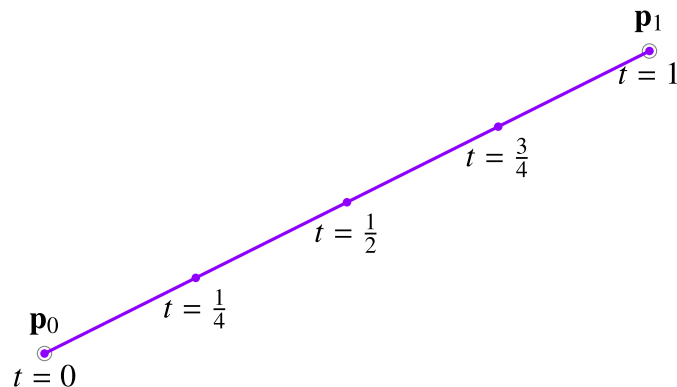
På Figur 3 kan vi se, at kurverne starter og slutter i første og sidste kontrolpunkt, og selvom kurven ikke nødvendigvis går gennem de øvrige kontrolpunkter, ser det ud som om de trækker kurven hen mod sig. Det er selvfølgelig meget løst sagt, og vi vil snart forklare sammenhængen mellem kontrolpunkter og kurven mere præcist. I dette afsnit, ser vi på kurver med kun to kontrolpunkter.

En bézierkurve defineret ud fra to kontrolpunkter kaldes en *lineær* bézierkurve og er defineret som følger.

Definition 4. Lad $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \in \mathbb{R}^2$ være givne kontrolpunkter. Den lineære bézierkurve givet ved disse to punkter er

$$\mathbf{b}(t) = (1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1, \quad t \in [0; 1].$$

Vi omskriver $\mathbf{b}(t) = (1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1 = t(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) + \mathbf{p}_0$, og ser, at når $\mathbf{p}_0 \neq \mathbf{p}_1$, da parametriserer den lineære bézierkurve $\mathbf{b}$ et linjestykke. I Opgave 3 viser du, at $\mathbf{b}(0) = \mathbf{p}_0$ og $\mathbf{b}(1) = \mathbf{p}_1$. Så det er linjestykket mellem de to kontrolpunkter, der parametriseres. I Opgave 4 viser du, at den afledede er konstant: $\mathbf{b}'(t) = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$. Så det kan være nyttigt at forestille sig, at $\mathbf{b}(t)$ rejser fra $\mathbf{p}_0$ til $\mathbf{p}_1$ med konstant hastighed. Når $t = 0$ er $\mathbf{b}(t) = \mathbf{p}_0$, når $t = \frac{1}{4}$ er en fjerdedel af afstanden fra $\mathbf{p}_0$ til $\mathbf{p}_1$ tilbagelagt, når $t = \frac{1}{2}$ har $\mathbf{b}(t)$ tilbagelagt halvdelen af afstanden og er midt imellem de to kontrolpunkter, osv. Se figur 4.



Figur 4. En bézierkurve $\mathbf{b}$, givet ved de to kontrolpunkter $\mathbf{p}_0$ og $\mathbf{p}_1$, parametriserer linjestykket mellem de to punkter. På kurven er angivet $\mathbf{b}(t)$ for $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$. Som det ses, ligger to på hinanden følgende punkter lige langt fra hinanden. Dette stemmer overens med, at $\mathbf{b}'(t)$ er konstant (uafhængig af t) for en lineær bézierkurve, og vi har valgt forskellen mellem t -værdierne til at være det samme.

Opgave 3

Vis at $\mathbf{b}(0) = \mathbf{p}_0$ og $\mathbf{b}(1) = \mathbf{p}_1$, svarende til, at linjestykket parametriseret ved $\mathbf{b}$, er linjestykket mellem de to kontrolpunkter.

Opgave 4

Lad først $\mathbf{p}_0 = (-1; 0)$ og $\mathbf{p}_1 = (2; 4)$.

a) Vis at den lineære bézierkurve givet ved de to kontrolpunkter $\mathbf{p}_0$ og $\mathbf{p}_1$ har forskriften

$$\mathbf{b}(t) = (3t - 1; 4t), \quad t \in [0; 1].$$

b) Tegn $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ og linjestykket parametriseret af $\mathbf{b}$ ind i et koordinatsystem.

c) Vis, ved at differentiere det fundne udtryk og ved at udregne $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$, at der gælder

$$\mathbf{b}'(t) = (3; 4) = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \quad t \in [0; 1].$$

Lad nu $\mathbf{p}_0 = (p_{01}; p_{02})$ og $\mathbf{p}_1 = (p_{11}; p_{12})$ være vilkårlige.

d) Vis at der helt generelt gælder

$$\mathbf{b}'(t) = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \quad t \in [0; 1].$$

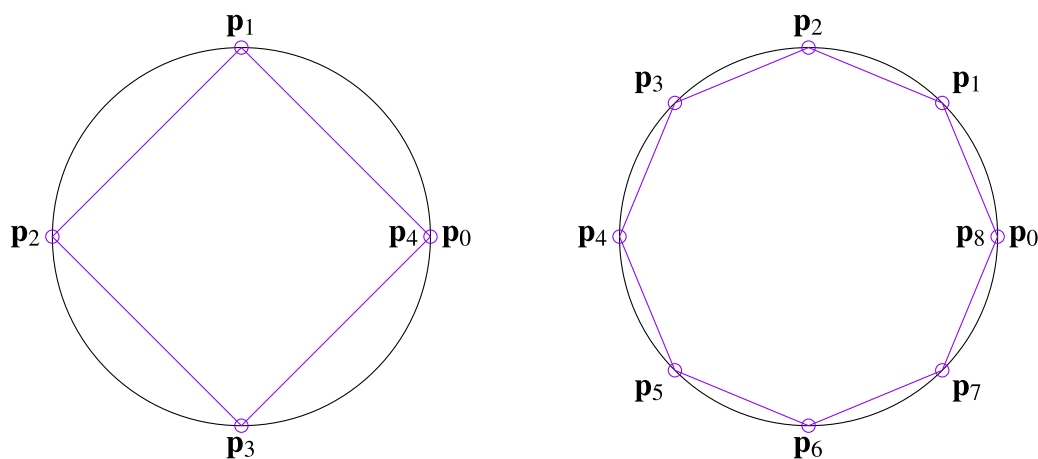
I dette afsnit har vi set, at en lineær bézierkurve parametriserer linjestykket mellem $\mathbf{p}_1$ og $\mathbf{p}_0$, og $\mathbf{b}'(t) = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$.

4 Lineære splines

Lad $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ og $\mathbf{p}_2$ være tre punkter i planen. Vi kan se på den kurve, der fremkommer, når man forbinder $\mathbf{p}_0$ og $\mathbf{p}_1$ med et linjestykke, og $\mathbf{p}_1$ og $\mathbf{p}_2$ med et linjestykke. Sådan en kurve har mange navne. Man kalder den polygonal kæde, en polygonal kurve, en brudt linje, en stykvis lineær kurve, etc. Vi vil nøjes med at kalde den en *lineær spline*.

Man kan selvfølgelig godt stykke mere end to lineære bézierkurver sammen. Givet $n + 1$ punkter, $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$, får man en lineær spline ved at stykke de n lineære bézierkurver sammen.

I den følgende figur har vi tegnet, den spline vi får, når vi tager punkter, der ligger jævnt fordelt på en cirkel. Vi sætter det sidste punkt $\mathbf{p}_n$ til at være lig det første $\mathbf{p}_0$. Når man gør det, får man en såkaldt *lukket* kurve.



Figur 5. Lineære splines med forskelligt antal kontrolpunkter.

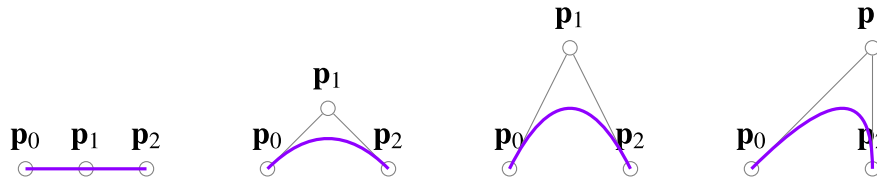
På Figur 5 har vi tegnet nogle lineære splines, hvor kontrolpunkterne er placeret jævnt fordelt på en cirkel. Det er visuelt klart, at splinen til højre (en regulær ottekant) tilnærmer cirklen bedre end splinen til venstre (kvadratet). Hvis man bruger mange punkter, fx 100 eller 200, kommer der et tidspunkt, hvor man ikke længere kan se forskel på den regulære n -kant og cirklen.

Lineære splines er simple, og de kan bruges til at tilnærme andre typer kurver, bare ved at vælge et stort antal kontrolpunkter. Det er nok grunden til, at lineære splines er meget anvendte i forskellige sammenhænge. Når for eksempel dit CAS-program tegner grafen

for en funktion, tegner den i virkeligheden lineære splines, men da kontrolpunkterne vælges omhyggeligt og i stort antal, kan man ikke altid lige se det.

5 Kvadratiske bézierkurver

En kvadratisk bézierkurve er givet ved tre kontrolpunkter $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ og $\mathbf{p}_2$. Her er nogle eksempler på sådanne kurver.



Figur 6. Fire eksempler på kvadratiske bézierkurver. Positionen af første og sidste kontrolpunkt er holdt fast, mens positionen af det midterste kontrolpunkt er varieret.

I Figur 6 er vist 4 eksempler på kvadratiske bézierkurver. Vi kan se, at kurverne starter og slutter i første og sidste kontrolpunkt. De går ikke alle gennem det midterste kontrolpunkt, men løst sagt virker det, som om kontrolpunktet hvier i kurven, så den krummer i retning af punktet.

Her er den præcise definition af en kvadratisk bézierkurve i planen.

Definition 5. Lad $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}^2$ være givne punkter. Definer afbildningerne $\mathbf{p}_0^1$ og $\mathbf{p}_1^1$ ved

$$\mathbf{p}_0^1(t) = (1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1, \text{ og } \mathbf{p}_1^1(t) = (1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2.$$

Den kvadratiske bézierkurve givet ved de tre kontrolpunkter er

$$\mathbf{b}(t) = (1-t)\mathbf{p}_0^1(t) + t\mathbf{p}_1^1(t), \quad t \in [0; 1].$$

Læg mærke til at $\mathbf{p}_0^1$ er en lineær bézierkurve med kontrolpunkterne $\mathbf{p}_0$ og $\mathbf{p}_1$, mens $\mathbf{p}_1^1$ er en lineær bézierkurve med kontrolpunkterne $\mathbf{p}_1$ og $\mathbf{p}_2$. Man kan med fordel tænke på det lille indeks 1 foroven som en påmindelse om, at koordinatfunktionerne af $\mathbf{p}_0^1$ og $\mathbf{p}_1^1$ er førstegradspolynomier.

Der gælder, at koordinatfunktioner for $\mathbf{b}(t)$ generelt er kvadratiske funktioner. Faktisk viser en lille udregning at

$$\mathbf{b}(t) = (1-t)^2\mathbf{p}_0 + 2(1-t)t\mathbf{p}_1 + t^2\mathbf{p}_2, \quad t \in [0; 1]. \quad (1)$$

Ja, faktisk foretrækker mange at bruge ligning (1) som definition på, hvad en kvadratisk bézierkurve er. Vi kan nu bedre lide Definition 5, for selvom den er længere, giver den mere geometrisk information end ligning (1).

Prøv selv at illustrere følgende eksempel med en tegning!

Eksempel 6

Som et eksempel på hvordan vi kan få geometrisk information ud af Definition 5, viser vi, at en kvadratisk bézierkurve ligger i trekant $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ og $\mathbf{p}_2$.

En trekant er en geometrisk figur, der har den egenskab, at hvis man tager to punkter i trekanten, så ligger linjestykket mellem de to punkter også i trekanten. (Sådanne figurer kaldes *konvekse*).

Lad $t_0 \in [0; 1]$ være et vilkårlig. Læg nu mærke til at $\mathbf{p}_0^1(t_0)$ ligger på kanten $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$, mens $\mathbf{p}_1^1(t_0)$ ligger på kanten $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$. Da $\mathbf{b}(t_0)$ ligger på linjestykket mellem $\mathbf{p}_0^1(t_0)$ og $\mathbf{p}_1^1(t_0)$, så ligger $\mathbf{b}(t_0)$ i trekanten. Da dette gælder for vilkårligt $t_0 \in [0; 1]$, forløber hele kurven i trekanten.

En god måde, at få greb om kvadratiske bézierkurver, er at tegne med lineal og blyant, som næste opgave viser.

Opgave 5

Afsæt tre punkter $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ og $\mathbf{p}_2$ på et papir. Sørg for at punkterne ikke ligger på linje, og at der er god afstand mellem dem, så tegningen ikke bliver gnidret. Tegn linjestykket fra $\mathbf{p}_0$ til $\mathbf{p}_1$ og linjestykket fra $\mathbf{p}_1$ til $\mathbf{p}_2$.

Del nu linjestykket fra $\mathbf{p}_0$ til $\mathbf{p}_1$ op i 4 lige store stykker, og kald de tre delepunkter $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ og $\mathbf{c}_3$, således at $\mathbf{p}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ og $\mathbf{p}_1$ er på hinanden følgende punkter.

Husk på at $\mathbf{p}_0^1$ er den lineære bézierkurve med kontrolpunkterne $\mathbf{p}_0$ og $\mathbf{p}_1$. Derfor gælder $\mathbf{p}_0^1(0) = \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0^1(\frac{1}{4}) = \mathbf{c}_1, \mathbf{p}_0^1(\frac{1}{2}) = \mathbf{c}_2, \mathbf{p}_0^1(\frac{3}{4}) = \mathbf{c}_3$ og $\mathbf{p}_0^1(1) = \mathbf{p}_1$.

Del også linjestykket fra $\mathbf{p}_1$ til $\mathbf{p}_2$ op i 4 lige store stykker og kald delepunkterne $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ og $\mathbf{d}_3$, således at $\mathbf{p}_1, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$ og $\mathbf{p}_2$ er på hinanden følgende punkter. Tænk over hvilken sammenhæng der er mellem $\mathbf{p}_1^1(t)$ for $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ og de punkter, du lige har tegnet.

Vi kan nu tegne fem punkter på bézierkurven. Det første punkt er $\mathbf{b}(0) = \mathbf{p}_0$, markér det med et kryds.

Det næste punkt $\mathbf{b}(\frac{1}{4})$ ligger på linjestykket mellem $\mathbf{c}_1$ og $\mathbf{d}_1$, således at længden fra $\mathbf{c}_1$ til $\mathbf{b}(\frac{1}{4})$ er en fjerdedel af den samlede længde fra $\mathbf{c}_1$ til $\mathbf{d}_1$. Markér punktet med et kryds.

Det tredje punkt $\mathbf{b}(\frac{1}{2})$ ligger midt i mellem $\mathbf{c}_2$ og $\mathbf{d}_2$. Markér det med et kryds.

Det fjerde punkt $\mathbf{b}(\frac{3}{4})$ svarer til, at man har rejst tre fjerdedele af vejen fra $\mathbf{c}_3$ til $\mathbf{d}_3$. Markér det med et kryds.

Det sidste punkt du skal markere er $\mathbf{b}(1)$, som er lig $\mathbf{p}_2$. Markér det med et kryds.

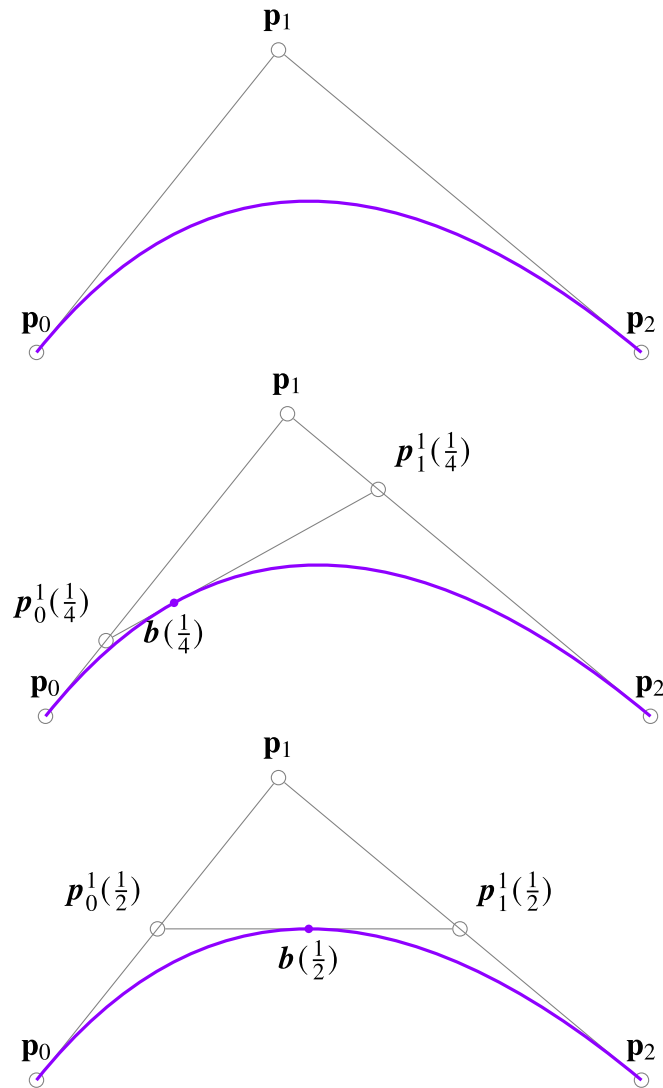
Forbind nu de fem punkter du har angivet med et kryds, med en fin svunget bue, tegnet efter bedste evne. Hermed har du skitseret bézierkurven, givet ved $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ og $\mathbf{p}_2$.

Tjek til sidst om den kurve du har tegnet, ligger i trekant $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$, som den jo bør ifølge Eksempel 6.

I opgaven før tegnede du støttepunkter på bézierkurven svarende til $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$, selvom du måske ikke var klar over hvorfor. Forklaringen kommer nu. Lad $t_0 \in [0; 1]$ være et fast tal. Ifølge Definition 5, er $\mathbf{p}_0^1$ bézierkurven med kontrolpunkterne $\mathbf{p}_0$ og $\mathbf{p}_1$. Så $\mathbf{p}_0^1(t_0)$ ligger på linjestykket mellem de to kontrolpunkter, svarende til at et punkt har bevæget sig andelen t_0 af vejen fra $\mathbf{p}_0$ til $\mathbf{p}_1$. Så vi kan finde og tegne punktet $\mathbf{p}_0^1(t_0)$ med lineal og blyant.

Tilsvarende er $\mathbf{p}_1^1$ bézierkurven med kontrolpunkterne $\mathbf{p}_1$ og $\mathbf{p}_2$. Så $\mathbf{p}_1^1(t_0)$ ligger på linjestykket mellem de to kontrolpunkter, svarende til at et punkt har bevæget sig andelen t_0 af vejen fra $\mathbf{p}_1$ til $\mathbf{p}_2$. Så kan vi også finde og tegne punktet $\mathbf{p}_1^1(t_0)$ med lineal og blyant.

Endelig siger Definition 5, at $\mathbf{b}(t_0)$ ligger på linjestykket mellem $\mathbf{p}_0^1(t_0)$ og $\mathbf{p}_1^1(t_0)$, svarende til at afstanden mellem $\mathbf{p}_0^1(t_0)$ og $\mathbf{b}(t_0)$ udgør andelen t_0 af den samlede afstand fra $\mathbf{p}_0^1(t_0)$ til $\mathbf{p}_1^1(t_0)$. Så igen kan vi finde og tegne støttepunktet $\mathbf{b}(t_0)$. Se på Figur 7 hvordan det kan se ud.



Figur 7. Øverst er vist en kvadratisk bézierkurve givet ved de tre kontrolpunkter $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ og $\mathbf{p}_2$. I midten er vist hvordan $\mathbf{b}(\frac{1}{4})$ ligger på linjestykket mellem $\mathbf{p}_0^1(\frac{1}{4})$ og $\mathbf{p}_1^1(\frac{1}{4})$. Nederst er det tilsvarende vist for $\mathbf{b}(\frac{1}{2})$.

Selvom Definition 5 giver en god geometrisk forståelse, er forskriften givet ved ligning (1) også nyttig.

Opgave 6

Vis ved at bruge ligningen (1), at der for en kvadratisk bézierkurve gælder

$$\mathbf{b}(0) = \mathbf{p}_0,$$

$$\mathbf{b}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\mathbf{p}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{p}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{p}_2,$$

$$\mathbf{b}(1) = \mathbf{p}_2.$$

Opgave 7

Lad $\mathbf{p}_0 = (-1; 0)$ og $\mathbf{p}_2 = (1; 0)$. Brug resultatet fra Opgave 6 til at bestemme kontrolpunktet $\mathbf{p}_1$, så den tilhørende kvadratiske bézierkurve opfylder $\mathbf{b}(\frac{1}{2}) = (0; 2)$.

Eksempel 7

Sæt $\mathbf{p}_0 = (0; 0)$, $\mathbf{p}_1 = (1; 1)$ og $\mathbf{p}_2 = (2; 0)$, og lad $\mathbf{b}$ betegne bézierkurven defineret ved de tre kontrolpunkter. Vi vil nu bruge Definition 5 til at beregne $\mathbf{b}(\frac{1}{3})$, og har derfor brug for at finde $\mathbf{p}_0^1(\frac{1}{3})$ og $\mathbf{p}_1^1(\frac{1}{3})$.

Det generelle udtryk for $\mathbf{p}_0^1$ er $\mathbf{p}_0^1(t) = (1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1$. Derfor er $\mathbf{p}_0^1(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}\mathbf{p}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{p}_1$. Sætter vi de kendte værdier for $\mathbf{p}_0$ og $\mathbf{p}_1$ ind, får vi

$$\mathbf{p}_0^1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}(0; 0) + \frac{1}{3}(1; 1) = (0; 0) + \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

Tilsvarende udregninger viser

$$\mathbf{p}_1^1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}(1; 1) + \frac{1}{3}(2; 0) = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Derfor får vi

$$\mathbf{b}\left(\frac{1}{3}\right) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{9}; \frac{2}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}; \frac{2}{9}\right) = \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{9}\right).$$

Vi kan tage skridtet videre og beregne et udtryk for $\mathbf{b}(t)$ for vilkårligt $t \in [0; 1]$. Der gælder

$$\mathbf{p}_0^1(t) = (1-t)(0; 0) + t(1; 1) = (t; t),$$

og

$$\mathbf{p}_1^1(t) = (1-t)(1; 1) + t(2; 0) = (1-t; 1-t) + (2t; 0) = (1+t; 1-t).$$

Udtrykket for $\mathbf{b}(t)$ bliver derfor

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(t) &= (1-t)\mathbf{p}_0^1(t) + t\mathbf{p}_1^1(t) \\ &= (1-t)(t; t) + t(1+t; 1-t) \\ &= (2t; 2t - 2t^2).\end{aligned}$$

Forvis dig om, du forstår hvert trin i udregningen ovenfor! Suppler eventuelt med ekstra mellemregninger.

Vi kan konkludere, at bézierkurven $\mathbf{b}$ er givet ved

$$\mathbf{b}(t) = (2t; 2t - 2t^2), \quad t \in [0; 1].$$

Opgave 8

Benyt ligning (1) til at bestemme forskriften for bézierkurven givet de tre kontrolpunkter, der blev brugt i Eksempel 7. Du skulle gerne komme frem til den samme forskrift for $\mathbf{b}(t)$ som i eksemplet.

Hvis vi kigger nærmere på Figur 7, ser det ud til at linjen gennem $\mathbf{p}_0^1(t)$ og $\mathbf{p}_1^1(t)$ tangerer bézierkurven, både for $t = \frac{1}{4}$ og $t = \frac{1}{2}$. Det følger af Definition 5, at linjestykket

mellem $\mathbf{p}_0^1(t)$ og $\mathbf{p}_1^1(t)$ og kurven har det fælles punkt $\mathbf{b}(t)$, men gælder der virkelig, at linjestykket tangerer kurven i dette punkt? Det siger følgende sætning, at der gør.

Sætning 1. Lad $\mathbf{b}$, $\mathbf{p}_0^1$ og $\mathbf{p}_1^1$ være givet som i Definition 5. Så er

$$\mathbf{b}'(t) = 2(\mathbf{p}_1^1(t) - \mathbf{p}_0^1(t)).$$

Hvis $t_0 \in [0; 1]$ er et tal hvor $\mathbf{b}'(t_0) \neq \mathbf{0}$, så er tangenten T_{t_0} til $\mathbf{b}$ for $t = t_0$, den linje der går gennem $\mathbf{p}_0^1(t_0)$ og $\mathbf{p}_1^1(t_0)$. Desuden har T_{t_0} parameterfremstillingen

$$\mathbf{T}_{t_0}(t) = \mathbf{b}(t_0) + 2t(\mathbf{p}_1^1(t_0) - \mathbf{p}_0^1(t_0)).$$

Læg mærke til at sætningen viser, at vi kan konstruere tangenten til $\mathbf{b}$ for $t = t_0$ med en blyant og lineal: Vi kan nemlig måle os frem til $\mathbf{p}_0^1(t_0)$ og $\mathbf{p}_1^1(t_0)$ og linjen, der indeholder de to punkter, er tangenten igennem $\mathbf{b}(t_0)$.

Bevis. Ifølge ligning (1) gælder $\mathbf{b}(t) = (1-t)^2\mathbf{p}_0 + 2(1-t)t\mathbf{p}_1 + t^2\mathbf{p}_2$. Differentierer vi på begge sider af lighedstegnet, sætter 2 udenfor parentes, og samler positive led for sig og negative led for sig, så får vi

$$\begin{aligned}\mathbf{b}'(t) &= -2(1-t)\mathbf{p}_0 + (-2t + 2(1-t))\mathbf{p}_1 + 2t\mathbf{p}_2 \\ &= 2(-(1-t)\mathbf{p}_0 + (-t + (1-t))\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2) \\ &= 2((1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2 - ((1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1)) \\ &= 2(\mathbf{p}_1^1(t) - \mathbf{p}_0^1(t)).\end{aligned}$$

Her ses det sidste lighedstegn ved at bruge Definition 5.

Sætter vi t_0 ind, får vi

$$\mathbf{b}'(t_0) = 2(\mathbf{p}_1^1(t_0) - \mathbf{p}_0^1(t_0)).$$

Ifølge Definition 3 er

$$\mathbf{T}_{t_0}(t) = \mathbf{b}(t_0) + 2t(\mathbf{p}_1^1(t_0) - \mathbf{p}_0^1(t_0))$$

en parameterfremstilling for tangenten, når bare $\mathbf{b}'(t_0) \neq \mathbf{0}$.

Vi mangler at vise, at linjen gennem $\mathbf{p}_0^1(t_0)$ og $\mathbf{p}_1^1(t_0)$ er tangenten.

For det første ligger punktet $\mathbf{b}(t_0)$ på linjen mellem $\mathbf{p}_0^1(t_0)$ og $\mathbf{p}_1^1(t_0)$ ifølge Definition 5. For det andet er $\mathbf{p}_1^1(t_0) - \mathbf{p}_0^1(t_0)$ en retningsvektor for linjen, mens en retningsvektor for tangenten er $2(\mathbf{p}_1^1(t_0) - \mathbf{p}_0^1(t_0))$, der peger i samme retning.

Så tangenten i t_0 og linjen gennem $\mathbf{p}_0^1(t_0)$ og $\mathbf{p}_1^1(t_0)$ indeholder begge punktet $\mathbf{b}(t_0)$ og forløber i samme retning, så derfor er de én og samme linje. $\square$

I følgende opgave skal du vise et resultat, vi får brug for flere gange senere, så vær omhyggelig med at løse den.

Opgave 9

Lad $\mathbf{b}(t)$ være givet ved de tre kontrolpunkter $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ og $\mathbf{p}_2$.

a) Brug Definition 5 til at vise, at

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0^1(0) &= \mathbf{p}_0, \\ \mathbf{p}_1^1(0) &= \mathbf{p}_1, \\ \mathbf{p}_0^1(1) &= \mathbf{p}_1 \text{ og} \\ \mathbf{p}_1^1(1) &= \mathbf{p}_2. \end{aligned}$$

Til at besvare de næste tre spørgsmål skal du bruge Sætning 1.

- b) Antag $\mathbf{p}_0$ og $\mathbf{p}_1$ er forskellige. Vis at tangenten til $\mathbf{b}$ for $t_0 = 0$ går gennem $\mathbf{p}_0$ og $\mathbf{p}_1$.
 c) Antag $\mathbf{p}_1$ og $\mathbf{p}_2$ er forskellige. Vis at tangenten til $\mathbf{b}$ for $t_0 = 1$ går gennem $\mathbf{p}_1$ og $\mathbf{p}_2$.
 d) Vis at der gælder $\mathbf{b}'(0) = 2(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$ og $\mathbf{b}'(1) = 2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)$.

Eksempel 8

Med alt det vi nu ved om kvadratiske bézierkurver, kan vi med rimelig stor sikkerhed skitsere kurven, givet de tre kontrolpunkter $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ og $\mathbf{p}_2$:



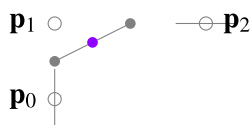
Se først på $t = 0$. Vi ved fra Opgave 6, at $\mathbf{b}(0) = \mathbf{p}_0$. Opgave 9 viser, at tangenten i dette punkt er linjen gennem $\mathbf{p}_0$ og $\mathbf{p}_1$:



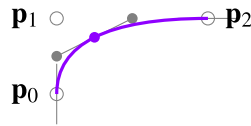
Tilsvarende, for $t = 1$ ses at $\mathbf{b}(1) = \mathbf{p}_2$, og tangenten i dette punkt er linjen gennem $\mathbf{p}_1$ og $\mathbf{p}_2$.



Lad os endelig se på $t = \frac{1}{2}$. Vi har, at $\mathbf{p}_0^1(\frac{1}{2})$ ligger midt mellem $\mathbf{p}_0$ og $\mathbf{p}_1$, mens $\mathbf{p}_1^1(\frac{1}{2})$ ligger midt mellem $\mathbf{p}_1$ og $\mathbf{p}_2$. Der gælder, at $\mathbf{b}(\frac{1}{2})$ ligger midt mellem de to midtpunkter $\mathbf{p}_0^1(\frac{1}{2})$ og $\mathbf{p}_1^1(\frac{1}{2})$, og linjen mellem disse to punkter er tangenten i punktet:



Ved at tegne de tre støttepunkter og de fundne tangenter samt bruge vores sunde fornuft, kan vi skitsere kurven:



Opgave 10

Sæt $\mathbf{p}_0 = (0; 1)$, $\mathbf{p}_1 = (1; 2)$ og $\mathbf{p}_2 = (0; -1)$.

- Skitsér bézierkurven med disse tre kontrolpunkter ved at gå frem som i eksemplet ovenfor.
- Bestem en forskrift for $\mathbf{b}$ og beregn $\mathbf{b}(\frac{1}{2})$.
- Bestem en forskrift for $\mathbf{b}'$ og beregn $\mathbf{b}'(\frac{1}{2})$.
- Bestem en parameterfremstilling for tangenten til $\mathbf{b}$ for $t_0 = \frac{1}{2}$.
- Tegn kurven for $\mathbf{b}$ og den fundne tangent i et koordinatsystem. Sammenlign med skitsen fra det første spørgsmål.

Vi har nu set mange eksempler på, hvordan vi kan finde punkter på kurven og tangenter til en kvadratisk bézierkurve givet ved kontrolpunkterne. Det næste eksempel viser noget, der er lige så nyttigt. Givet startpunkt og endepunkt samt tangenterne her, kan vi finde de tre kontrolpunkter, (når de to tangenter skærer hinanden).

Eksempel 9

Vi vil gerne finde kontrolpunkterne for en kvadratisk bézierkurve, der opfylder at $\mathbf{b}(0) = (0; 0)$, $\mathbf{b}(1) = (2; 1)$ således at tangenten i $\mathbf{b}(0)$ er vandret (dvs. parallel med førsteaksen, mens tangenten i $\mathbf{b}(1)$ er lodret (dvs. parallel med andenaksen). Opgave 6 viser, at vi skal have $\mathbf{p}_0 = \mathbf{b}(0) = (0; 0)$. Samme opgave viser, at vi skal have $\mathbf{p}_2 = \mathbf{b}(1) = (2; 1)$.

Da tangenten i $\mathbf{b}(0)$ skal være vandret og gå gennem $\mathbf{p}_0$, må den have ligningen $x_2 = 0$, og ifølge Opgave 9, ligger $\mathbf{p}_1$ på denne linje. Da tangenten i $\mathbf{b}(1)$ skal være lodret og gå igennem $\mathbf{p}_2$, må den have ligningen $x_1 = 2$. Ifølge Opgave 9 ligger $\mathbf{p}_1$ på denne linje. Altså $\mathbf{p}_1$ ligger på både linjen $x_2 = 0$ og $x_1 = 2$, så vi må have $\mathbf{p}_1 = (2; 0)$. Hermed har vi bestemt de tre kontrolpunkter.

6 Splines af kvadratiske bézierkurver

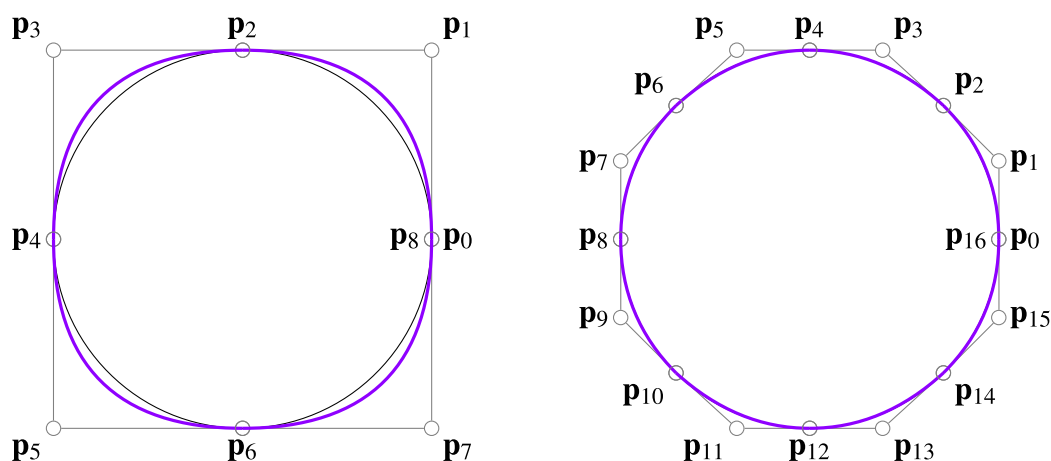
I afsnit 4 stykkede vi lineære bézierkurver sammen til en spline. I dette afsnit gentager vi kunsten, men denne gang ved stykke kvadratiske bézierkurver sammen.

Givet 5 kontrolpunkter $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ og $\mathbf{p}_4$, kan vi definere to kvadratiske bézierkurver: En med kontrolpunkterne $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ og $\mathbf{p}_2$ og en anden med kontrolpunkterne $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ og $\mathbf{p}_4$. Den kurve vi får ved at stykke de to bézierkurver sammen, er et eksempel på en kvadratisk spline. Da $\mathbf{p}_2$ er endepunktet for den første bézierkurve, samtidig med at det er begyndelsespunktet for den anden, er den samlede kurve kontinuert (den springer ikke).

Mere generelt kan vi for $n > 0$, betragte den kvadratiske spline givet ved kontrolpunkterne $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{2n}$. Det er den kurve man får, når man først gennemløber den kvadratiske bézierkurve med kontrolpunkterne $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ og $\mathbf{p}_2$, så den med kontrolpunkterne $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ og $\mathbf{p}_4$, osv., og til sidst den med kontrolpunkterne $\mathbf{p}_{2n-2}, \mathbf{p}_{2n-1}$ og $\mathbf{p}_{2n}$. Dette svarer til, at splinen er stykket sammen af n kvadratiske bézierkurver.

Læg mærke til at kontrolpunkterne med lige indeks, bortset fra $\mathbf{p}_0$ og $\mathbf{p}_{2n}$, altså kontrolpunkterne på formen $\mathbf{p}_{2j}$, $j = 1, 2, \dots, n-1$, indgår i to bézierkurver, nemlig som endepunkt for én bézierkurve og startpunkt for den næste.

Hvis det sidste kontrolpunkt er lig det første, $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_{2n}$, så får man en lukket kurve.



Figur 8. Figuren viser cirkler og kvadratiske splines. Kontrolpunkterne $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2, \dots$, er valgt jævnt fordelt på cirklen.

På Figur 8 har vi tilnærmet en cirkel med en spline bestående af fire kvadratiske bézierkurver til venstre, og 8 kvadratiske bézierkurver til højre. Den kvadratiske spline til højre tilnærmer så godt, at vi ikke længere kan se den sorte cirkel, der gemmer sig bagved.

De to kvadratiske splines vist på figuren er konstrueret sådan, at kurverne ikke knækker nogen steder. Vi vil nu se på, hvordan man kan opnå det i praksis.

Lad os se på en kvadratisk spline med kontrolpunkterne $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ og $\mathbf{p}_4$. Den er stykket af sammen af to bézierkurver: Den første, $\mathbf{b}_1$, er givet ved kontrolpunkterne $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$, mens den anden, $\mathbf{b}_2$, er givet ved kontrolpunkterne $\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$. Man kan vise, at hvis den afledede $\mathbf{b}'_1(1)$ peger i samme retning som den afledede $\mathbf{b}'_2(0)$, så knækker splinen ikke ved $\mathbf{p}_2$.

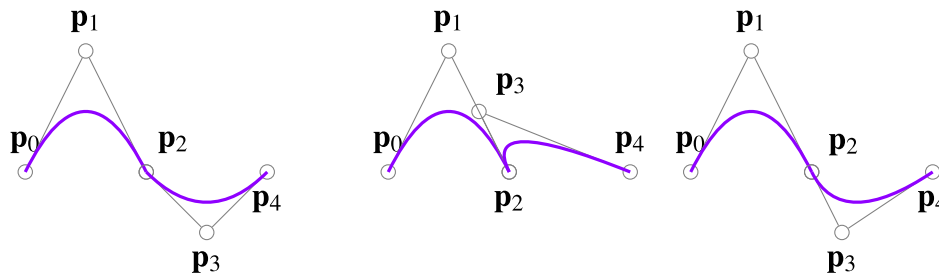
I Opgave 9 viste du, at $\mathbf{b}'_1(1)$ peger i samme retning som $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$. Fra samme opgave ved vi, at $\mathbf{b}'_2(0)$ peger i samme retning som $\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2$. En geometrisk betragtning viser nu,

at disse to vektorer peger i samme retning, hvis $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ og $\mathbf{p}_3$ er på hinanden følgende punkter på en linje. Det leder til følgende resultat.

Sætning 2. Lad en spline være givet ved kontrolpunkterne $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$, og lad $0 < j < n$ være vilkårlig. Hvis $\mathbf{p}_{2j-1} \neq \mathbf{p}_{2j}$ og $\mathbf{p}_{2j} \neq \mathbf{p}_{2j+1}$ gælder: Splinen har en tangent (den knækker ikke) i $\mathbf{p}_{2j}$, hvis og kun hvis de tre punkter $\mathbf{p}_{2j-1}$, $\mathbf{p}_{2j}$ og $\mathbf{p}_{2j+1}$ er på hinanden følgende punkter på en linje.

Det følger af Sætning 1, at hvis de tre punkter $\mathbf{p}_{2j-1}$, $\mathbf{p}_{2j}$ og $\mathbf{p}_{2j+1}$ ligger på linje som beskrevet i Sætning 2, så er denne linje tangenten for splinen i punktet $\mathbf{p}_{2j}$.

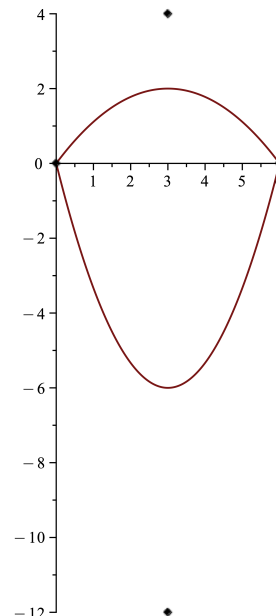
Hvad der menes med *på hinanden følgende punkter* er illustreret i Figur 9.



Figur 9. Figuren illustrerer tre forskellige splines stykket sammen af to kvadratiske bézierkurver. Kurven til venstre har ikke en tangent i $\mathbf{p}_2$, fordi $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ ikke ligger på linje. Kurven i midten har ikke en tangent i $\mathbf{p}_2$, for selvom om $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ ligger på linje, er de ikke på hinanden følgende punkter på linjen. Kurven til højre har en tangent i $\mathbf{p}_2$, for $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ er på hinanden følgende punkter på en linje.

Opgave 11

En designer vil gerne skabe et bord inspireret af billedet vist til venstre i Figur 10.



Figur 10. En designer vil gerne skabe et bord inspireret af billedet vist til venstre. Til højre er vist et første udkast tegnet i et CAS-program.

Til at beskrive bordets omrids benytter designeren en kvadratisk spline givet ved de 5 kontrolpunkter

$$\mathbf{p}_0 = (0; 0), \mathbf{p}_1 = (3; -12), \mathbf{p}_2 = (6; 0), \mathbf{p}_3 = (3; 4), \text{ og } \mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_0.$$

Alle mål er i decimeter. På Figur 10 til højre kan man se splinen sammen med kontrolpunkterne.

a) Vis at de to bézierkurver som splinen er stykket sammen af, er givet ved

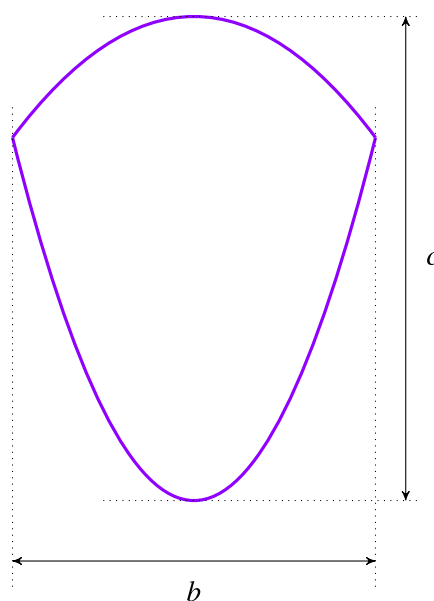
$$\mathbf{b}_1(t) = (6t; 24t^2 - 24t) \text{ og}$$

$$\mathbf{b}_2(t) = (6 - 6t; -8t^2 + 8t).$$

b) Argumenter for at splinen ikke har en tangent i $\mathbf{p}_2$.

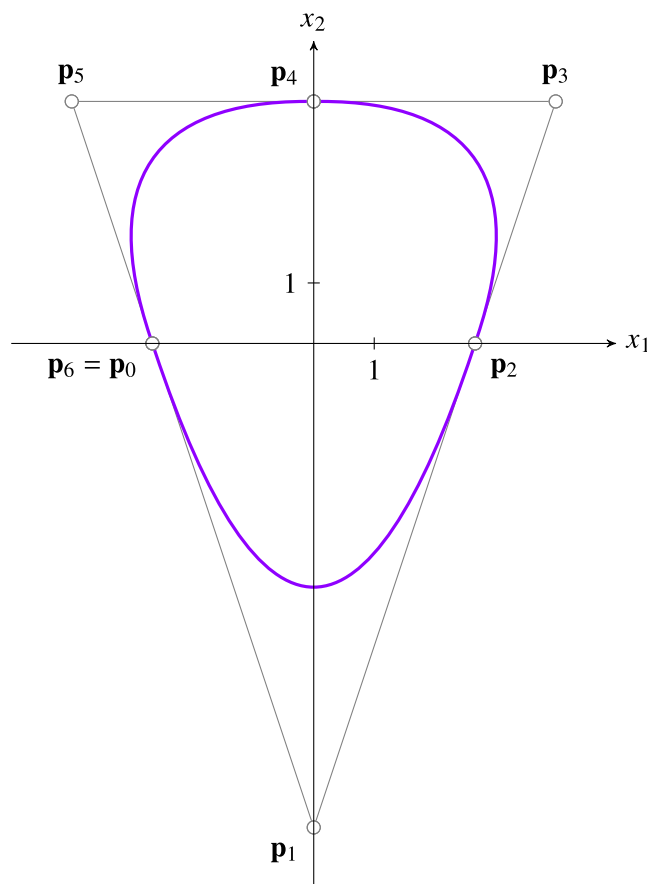
c) Bestem $\mathbf{b}_1(\frac{1}{2})$, $\mathbf{b}_2(\frac{1}{2})$, $\mathbf{b}'_1(\frac{1}{2})$ og $\mathbf{b}'_2(\frac{1}{2})$.

d) Argumenter for at bordets bredde er $b = 6$, og bordets længde er $c = 8$, se Figur 11.



Figur 11. Designerens bord har bredden b og længden c .

Designeren er ikke tilfreds med sit første udkast og vil gerne have et omrids af bordet uden knæk. Ved at vælge en kvadratisk spline givet ved 6 forskellige nye kontrolpunkter $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_5, \mathbf{p}_6 = \mathbf{p}_0$, fremkommer følgende figur (Figur 12).



Figur 12. Det nye design.

I det nye design er $\mathbf{p}_1 = (0; -8)$, $\mathbf{p}_2 = \left(\frac{8}{3}; 0\right)$ og $\mathbf{p}_4 = (0; 4)$. Desuden har splinen en tangent i $\mathbf{p}_2$ og en vandret tangent i $\mathbf{p}_4$.

- e) Brug Sætning 2 til at forklare hvorfor $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ og $\mathbf{p}_3$ skal ligge på linje og bestem en ligning for denne linje.
- f) Forklar hvorfor $\mathbf{p}_3$ og $\mathbf{p}_4$ ligger på en vandret linje og bestem en ligning for denne linje.
- g) Bestem $\mathbf{p}_3$.

7 Kort om kubiske bézierkurver

Kubiske bézierkurver er polynomielle kurver af 3. grad. De udgør den klasse af bézierkurver, der nok mest anvendes i praksis.

En lineær bézierkurve er givet ved to kontrolpunkter, mens en kvadratisk bézierkurve er givet ved tre. Det kommer derfor nok ikke som en overraskelse, at en kubisk bézierkurve er givet ved fire kontrolpunkter, $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, og $\mathbf{p}_3$.

Kurven starter i punktet $\mathbf{b}(0) = \mathbf{p}_0$ og slutter i $\mathbf{b}(1) = \mathbf{p}_3$. Desuden gælder $\mathbf{b}'(0) = 3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$, og $\mathbf{b}'(1) = 3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)$. Det betyder, at hvis vi er givet vilkårlige punkter $\mathbf{a}_0$,

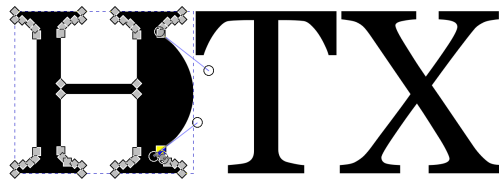
$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{v}_0$ og $\mathbf{v}_1$, så findes der en kubisk bézierkurve, der opfylder

$$\mathbf{b}(0) = \mathbf{a}_0, \mathbf{b}(1) = \mathbf{a}_1, \mathbf{b}'(0) = \mathbf{v}_0 \text{ og } \mathbf{b}'(1) = \mathbf{v}_1.$$

Denne fleksibilitet udviser kvadratiske bézierkurver ikke. Man kan indse, at hvis vi stiller tre ud af de fire krav ovenfor, så er der kun én kvadratisk bézierkurve, der opfylder dem.

Med den ekstra fleksibilitet følger dog den ulempe, at det er sværere at forestille sig forløbet af en kubisk bézierkurve, givet kontrolpunkterne. Det er dog ikke mere vanskeligt, end at det godt kan lade sig gøre med erfaring. Kubiske bézierkurver rammer derfor en fin balance mellem fleksibilitet og forudsigelighed. Det er nok det, der ligger til grund for deres popularitet.

Hvis man stykker to eller flere kubiske bézierkurver sammen, er den resulterende kurve et eksempel på en kubisk spline. På figur 13 er vist, hvordan omridset af et bogstav kan defineres ved hjælp af en spline.



Figur 13. Bogstavernes omrids er stykket sammen af bézierkurver af forskellig orden. Vi har hevet i to af kontrolpunkterne til en kubisk bézierkurve der indgår i den spline, der definerer omridset af det første bogstav, så det fremstår deformeret.

8 Perspektivering

Vi har i dette materiale taget hul på teorien om bézierkurver og splines, der kan dannes ved at stykke sådanne kurver sammen. Overalt hvor der bruges tekniske tegninger på computeren og såkaldt vektorgrafik, indgår bézierkurver. Vi har fokuseret på lineære og kvadratiske bézierkurver. Man kan konstruere bézierkurver af højere orden (se det følgende appendiks).

Vi har også set, hvordan man kan stykke to bézierkurver sammen og få en spline. Generelt betyder spline en stykvis polynomiell kurve, og der er også andre måder at konstruere dem på, end hvad vi har gjort i dette materiale. Desuden er det interessant at sige noget om længden af en spline, såvel som krumning og torsion, men det ligger uden for dette materiales rammer at behandle disse spørgsmål.

Bézierkurver har en todimensional pendant der kaldes *bézierflader*. Det er funktioner af to variable $\mathbf{p}(u, v)$ givet ved nogle kontrolpunkter, der opfylder, at hvis vi holder den ene koordinat fast, så fremstiller den fremkomne funktion en bézierkurve.

Appendiks

Generelle bézierkurver

Efter at have set på bézierkurver givet ved 2, 3 og 4 kontrolpunkter, går vi nu over til at behandle den generelle situation, hvor bézierkurven er givet ved $n + 1$ kontrolpunkter $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$. Vi opskrifter en definition som generaliserer Definition 4 og 5, således forstået at disse definitioner blot er specialtilfælde af den generelle definition.

Definition 6. Lad $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^2$ være givne kontrolpunkter. Sæt først $\mathbf{p}_j^0(t) = \mathbf{p}_j$, for $j = 0, 1, \dots, n$. Dernæst, for $k = 1, 2, \dots, n$, definer

$$\mathbf{p}_j^k(t) = (1 - t)\mathbf{p}_j^{k-1}(t) + t\mathbf{p}_{j+1}^{k-1}(t), \quad j = 0, 1, \dots, n - k.$$

Så er bézierkurven med kontrolpunkterne $\mathbf{p}_j$, $j = 0, 1, \dots, n$, kurven med forskriften

$$\mathbf{b}(t) = \mathbf{p}_0^n(t), \quad t \in [0; 1].$$

Læg mærke til at definitionen lægger op til en algoritme til at beregne $\mathbf{b}(t)$ for en given værdi af t . Denne algoritme kaldes *de Casteljans algoritme*, og kan bruges til at beregne værdien af et givet, vilkårligt polynomium i et givet tal.

Vi kan skrive kurverne $\mathbf{p}_j^k(t)$ givet i definitionen op i et skema:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{p}_0^0(t) & \mathbf{p}_1^0(t) & \mathbf{p}_2^0(t) & \cdots & \cdots & \mathbf{p}_{n-1}^0(t) & \mathbf{p}_n^0(t) \\ \mathbf{p}_0^1(t) & \mathbf{p}_1^1(t) & \mathbf{p}_2^1(t) & \cdots & \cdots & \mathbf{p}_{n-1}^1(t) & \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ \mathbf{p}_0^{n-1}(t) & \mathbf{p}_1^{n-1}(t) & & & & & \\ \mathbf{p}_0^n(t) & & & & & & \end{array}$$

Definition 6 fortæller os, at den øverste række i dette skema blot er lig de givne kontrolpunkter, og de øvrige elementer fås ved at tage t gange elementet over i skemaet plus $1 - t$ gange elementet diagonalt over til højre. Det kan vi illustrere på følgende måde

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{p}_j^{k-1}(t) & & \mathbf{p}_{j+1}^{k-1}(t) \\ \downarrow 1-t & \swarrow t & \\ \mathbf{p}_j^k(t) & & \end{array}$$

fordi $\mathbf{p}_j^k(t) = (1 - t)\mathbf{p}_j^{k-1}(t) + t\mathbf{p}_{j+1}^{k-1}(t)$.

Følgende sætning giver os en forskrift i det generelle tilfælde.

Sætning 3. Lad $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^2$ være givne kontrolpunkter. Så har bézierkurven med disse kontrolpunkter forskriften

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k \mathbf{p}_k, \quad t \in [0; 1].$$

Sumtegnet $\sum_{k=0}^n$ betyder, at vi skal tage $\binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k \mathbf{p}_k$ for $k = 0, 1, \dots, n$ og lægge sammen. Det betyder at formlen i sætningen blot er en kompakt måde at skrive

$$\mathbf{b}(t) = \binom{n}{0} (1-t)^n t^0 \mathbf{p}_0 + \binom{n}{1} (1-t)^{n-1} t^1 \mathbf{p}_1 + \dots + \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k \mathbf{p}_k + \dots + \binom{n}{n} (1-t)^0 t^n \mathbf{p}_n$$

på.

Symbolet $\binom{n}{k}$ kaldes en binomialkoefficient og angiver et heltal. Man sætter $\binom{n}{0} = 1$. For et heltal $k > 0$, sætter man $\binom{n}{k}$ til brøken $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1}$. Altså der skal ganges k tal sammen både i tælleren og nævneren. I tælleren starter man med tallet n og ganger det med tallet $(n-1)$ og med tallet $(n-2)$ osv., indtil man har et produkt bestående af k tal. Det svarer til, at den sidste faktor er $n-k+1$. Nævneren får man ved at gange $k, k-1, \dots, 1$ sammen.

For eksempel er

$$\begin{aligned} \binom{3}{0} &= 1, \\ \binom{3}{1} &= \frac{3}{1} = 3, \\ \binom{3}{2} &= \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3 \text{ og} \\ \binom{3}{3} &= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1. \end{aligned}$$

Så det udtryk vi får i Sætning 3, for $n = 3$, er

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t) &= \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} (1-t)^{3-k} t^k \mathbf{p}_k \\ &= \binom{3}{0} (1-t)^{3-0} t^0 \mathbf{p}_0 + \binom{3}{1} (1-t)^{3-1} t^1 \mathbf{p}_1 + \binom{3}{2} (1-t)^{3-2} t^2 \mathbf{p}_2 + \binom{3}{3} (1-t)^{3-3} t^3 \mathbf{p}_3 \\ &= (1-t)^3 \mathbf{p}_0 + 3(1-t)^2 t \mathbf{p}_1 + 3(1-t) t^2 \mathbf{p}_2 + t^3 \mathbf{p}_3. \end{aligned}$$

Hermed har vi fundet en forskrift for en kubisk bézierkurve.

Dette prøvesæt er omfattet af ophavsretten, jf. ophavsretslovens § 1. Prøvesættet må alene anvendes til den på prøvesættet anførte prøve. Al anden anvendelse af prøvesættet, herunder visning eller deling f.eks. via internettet, sociale medier, portaler og bøger, udgør en krænkelse af Børne- og Undervisningsministeriets og evt. tredjemands ophavsret og er ikke tilladt. Overtrædelse af ophavsretten kan være erstatningspådragende og/eller strafbart.

Prøvesættet kan dog, efter at prøveperioden er afsluttet, anvendes til undervisningsbrug på uddannelser m.v. omfattet af den lovgivning, som Styrelsen for Undervisning og Kvalitet administrerer.